SESSION 2009

BREVET TECHNICIEN SUPÉRIEUR

CHIMISTE

Mathématiques

Durée : 2 heures
Coefficient : 3

Matériel autorisé :
- Calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante et sans dispositif de communication externe (circulaire n° 99-186 du 16/11/99).

Aucun document autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4 et le formulaire de mathématiques numéroté 1 à 4 (agrafé avec le sujet).

Code sujet : **CHMAT – P/09**

EXERCICE N°1 (10 points)

On étudie la réaction de dimérisation du buta -1,3 - diène en phase gazeuse, symbolisée par :

$$2B\ (gaz) \rightarrow C(gaz)$$

On étudie la cinétique de cette réaction.

- A l'instant t = 0, la concentration du buta -1,3 - diène est notée a.

  $[B]_{init} = a$ où a est strictement positif.

- De même à l'instant t, la concentration du buta -1,3 - diène est notée $x(t)$.

  $[B] = x(t)$ où x est une fonction telle que : $0 < x(t) \leq a$.

On admet que la vitesse v de la réaction obéit à la loi cinétique :

$$(1) \qquad v = k\ [B]^2$$

où k est une constante strictement positive liée à la réaction, et on rappelle que la vitesse v de la réaction est définie par :

$$(2) \qquad v(t) = -\frac{dx}{dt} = -x'(t) \text{ où } x' \text{ est la fonction dérivée de la fonction } x.$$

Le temps t s'exprime en minutes.

Partie A : étude théorique

1) Justifier que la fonction x vérifie l'équation différentielle, notée (E), $-\frac{x'}{x^2} = k$ en utilisant les relations (1) et (2).

2) Démontrer que la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $x(0) = a$ est telle que :

$$x(t) = \frac{a}{akt + 1}.$$

3) Exprimer le temps de demi-réaction, noté $t_{0,5}$, au bout duquel la moitié du buta -1,3 - diène initial a été consommée, en fonction de k et a.

4) Exprimer le temps de trois-quarts de réaction, noté $t_{0,75}$, au bout duquel les trois-quarts du buta -1,3 - diène initial ont été consommés, en fonction de k et a.

5) Vérifier que $\frac{t_{0,75}}{t_{0,5}} = 3$.

6) Après quel instant, exprimé en fonction de k et a, restera-t-il moins de 10% du buta -1,3 - diène initial ?

Partie B : exploitation de résultats expérimentaux

On donne $a = 2{,}000\ \text{mol.L}^{-1}$.
On obtient expérimentalement les résultats suivants :

t (en minutes)	0	5	10	15	20	25	30
$x(t)$ (en mol.L^{-1})	2,000	1,301	0,999	0,803	0,665	0,571	0,498

1) Lire dans le tableau ci-dessus les valeurs approchées des temps de demi-réaction et trois-quarts de réaction, puis vérifier que ces valeurs approchées sont dans un rapport 3 comme établi dans la partie A question 5).

2) Reproduire sur la copie et compléter le tableau ci-dessous (on arrondira à 10^{-3}) :

t (en minutes)	0	5	10	15	20	25	30
$z(t) = \dfrac{1}{x(t)}$							

3) a / Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre t et z arrondi à 10^{-4}.
b / Un ajustement linéaire est-il justifié ?

4) Déterminer une équation de la droite des moindres carrés sous la forme $z = m\,t + p$ (m et p seront donnés avec une précision de 10^{-2}). En déduire une expression approchée de $x(t)$ en fonction de t.

5) En utilisant le résultat de la modélisation de la deuxième question de la partie A, déterminer une valeur approchée de la constante k de la réaction.

EXERCICE N°2 (10 points)

Une entreprise fabrique en grande série des fioles jaugées de laboratoire de contenance théorique 500 mL. Ces fioles jaugées sont donc calibrées sur 500 mL (dans toute la suite du problème on désignera par fiole une fiole jaugée). On s'intéresse à la qualité de la calibration à l'aide d'un contrôle gravimétrique.
Les résultats des calculs seront arrondis au millième sauf indication contraire.

PARTIE A

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque fiole, associe le résultat du contrôle gravimétrique en mL.
On considère que X suit une loi normale de moyenne 500 et d'écart type $\sigma = 0,1$.

1) Calculer la probabilité d'obtenir le résultat du contrôle dans l'intervalle [499,8 ; 500,2].

2) Déterminer à 10^{-3} près le nombre positif h tel que 80% des résultats appartiennent à l'intervalle [$500 - h$; $500 + h$].

PARTIE B

On refuse toutes les fioles pour lesquelles le volume obtenu lors du contrôle gravimétrique est supérieur à 500,2 mL ou inférieur à 499,8 mL et elles sont alors considérées comme défectueuses. On suppose maintenant que la probabilité qu'une fiole soit défectueuse est égale à 0,05.
Dans un lot d'un très grand nombre de fioles, on effectue un contrôle sur 50 fioles choisies au hasard. On appelle alors Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 fioles, associe le nombre de fioles défectueuses.

On assimile les prélèvements de 50 fioles à des tirages de 50 fioles avec remise.

1) Justifier que Y suit une loi binomiale de paramètres 50 et 0,05.

2) a / Donner une valeur approchée de la probabilité qu'il n'y ait aucune fiole défectueuse dans le lot.
b / Donner une valeur approchée de la probabilité qu'il y ait au moins trois fioles défectueuses dans le lot.

PARTIE C

A l'occasion d'une commande, un laboratoire reçoit des fioles de l'entreprise, laquelle lui assure que les fioles jaugées ont bien une contenance de 500 mL. Il envisage d'effectuer un test de conformité de la commande reçue, avec la valeur $\mu = 500$ annoncée par l'entreprise. Pour réaliser ce test d'hypothèse bilatéral, il effectuera un prélèvement aléatoire, assimilé à un prélèvement avec remise de 100 fioles prises dans le lot reçu.
Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à un tel prélèvement, associe le volume moyen des 100 fioles.

1) Construction du test

A l'hypothèse nulle H_0 : « $\mu = 500$ », on oppose l'hypothèse alternative H_1 : « $\mu \neq 500$ ».
Sous l'hypothèse nulle H_0, on admet que $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne 500 et d'écart type

$$\frac{\sigma}{\sqrt{100}} = 0,01.$$

a / En se plaçant sous l'hypothèse H_0, déterminer la valeur arrondie à 10^{-2} près du réel h tel que la probabilité $P(\mu - h \leq \overline{X} \leq \mu + h)$ soit égale à 0,95.

b / En déduire l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0 au seuil de risque de 5%.

c / Énoncer la règle de décision du test.

2) Utilisation du test

Le laboratoire, après avoir prélevé 100 fioles, constate un volume moyen de 499,96 mL.
Appliquer le test à l'échantillon puis conclure.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS CHIMISTE

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\operatorname{Arc}\sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\operatorname{Arc}\tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$		
$\sin t$	$\cos t$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$\left(e^u\right)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ar^2 + br + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ sont les racines
de discriminant Δ	complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

3. PROBABILITES

a) Loi binomiale $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X)=np$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) Loi exponentielle

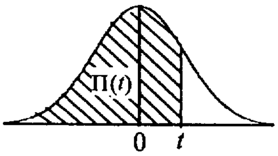
Fonction de fiabilité : $R(t)=e^{-\lambda t}$ $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE *t*

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$