



SERVICES CULTURE ÉDITIONS
RESSOURCES POUR
L'ÉDUCATION NATIONALE

**Ce document a été numérisé par le CRDP de Bordeaux pour la
Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel**

Campagne 2009

Ce fichier numérique ne peut être reproduit, représenté, adapté ou traduit sans autorisation.

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SESSION 2009

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B

CODE : MATGRB2

Durée : 2 heures

SPECIALITE	COEFFICIENT
Conception et industrialisation en microtechniques	1,5

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

GROUPEMENT B DES BTS	SESSION 2009
Mathématiques	MATGRB2
Durée : 2 heures	Page : 1/5

EXERCICE 1 (12 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 8e^x$.

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} , y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E_0) :

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

2° Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 4x^2 e^x$.

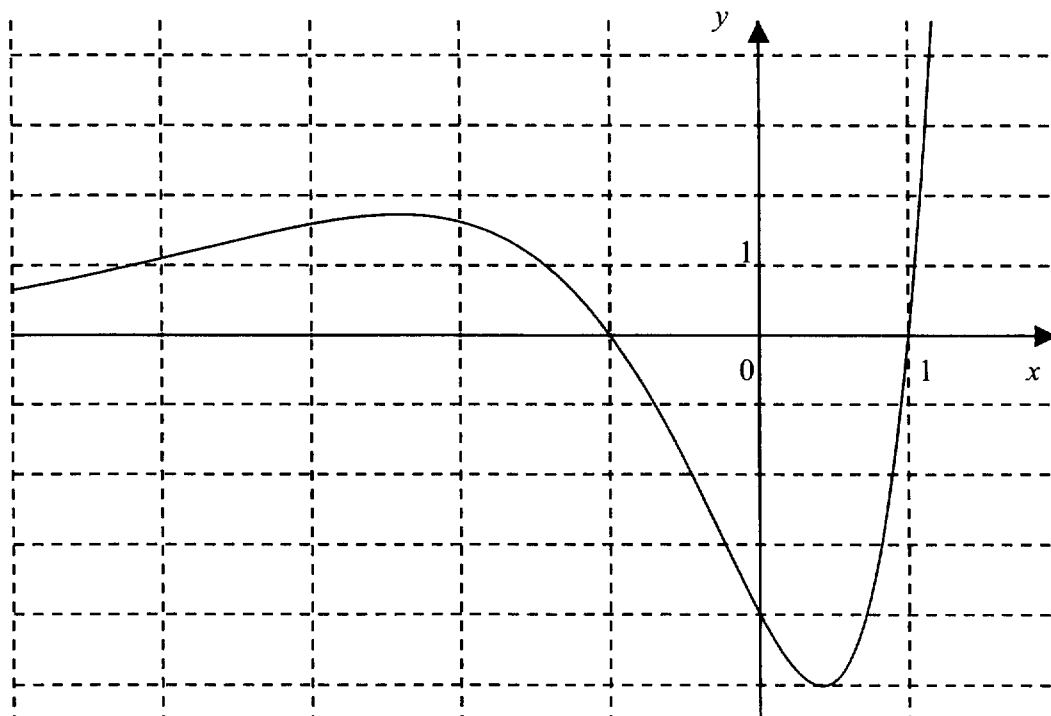
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E) .

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (4x^2 - 4)e^x$. Sa courbe représentative C dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



GROUPEMENT B DES BTS	SESSION 2009
Mathématiques	MATGRB2
Durée : 2 heures	Page : 2/5

- 1° a) Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = 4(x^2 + 2x - 1)e^x$.
- b) Donner sans justification la valeur exacte et la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'abscisse de chacun des points de la courbe C où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
- 2° a) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = -4 - 4x + 2x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.
- b) Dédire du a) une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
- c) Étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

Dans cette partie, les questions 1° et 2° peuvent être traitées de façon indépendante.

1° La fonction f définie au début de la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.

Donc, pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) = -f''(x) + 2f'(x) + 8e^x$.

En déduire une primitive F de la fonction f sur \mathbb{R} .

2° a) Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

b) Dans cette question, on admet que la fonction F définie sur \mathbb{R} par

$F(x) = (4x^2 - 8x + 4)e^x$ est une primitive de la fonction f .

Dédire de ce qui précède l'aire A , en unités d'aire, de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

C.R.D.P.

75, cours Alsace et Lorraine
33075 BORDEAUX CEDEX
Tél. : 05 56 01 56 70

GROUPEMENT B DES BTS	SESSION 2009
Mathématiques	MATGRB2
Durée : 2 heures	Page : 3/5

EXERCICE 2 (8 points)

On considère un signal correspondant à la fonction f , définie sur \mathbb{R} , périodique de période $T = 2\pi$ et telle que :

$$f(t) = \pi - t \text{ pour } 0 \leq t < \pi \text{ et } f(t) = 0 \text{ pour } \pi \leq t < 2\pi .$$

Soit $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n \omega t) + b_n \sin(n \omega t))$ le développement en série de Fourier associé à la fonction f .

1° Tracer, dans un repère orthogonal, une représentation graphique de la fonction f , pour t appartenant à l'intervalle $[-2\pi, 6\pi[$.

2° Montrer que $a_0 = \frac{\pi}{4}$.

3° Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les intégrales suivantes, pour n entier non nul :

$$\int_0^{\pi} (\pi - t) \cos(nt) dt = \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \text{ et } \int_0^{\pi} (\pi - t) \sin(nt) dt = \frac{\pi}{n} .$$

Ces résultats sont admis et n'ont donc pas à être démontrés.

En déduire les expressions de a_n et de b_n en fonction de l'entier non nul n .

4° Calcul d'une valeur approchée de la valeur efficace de f

Pour tout entier n , on pose $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ pour $n \geq 1$ et $c_0 = |a_0|$, où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction f .

Le tableau suivant donne les valeurs de c_n , arrondies à 10^{-4} , pour n variant de 0 à 5.

n	0	1	2	3	4	5
c_n	0,785 4	1,185 4	0,5	0,340 8	0,25	0,201 6

On note E_f la valeur efficace de la fonction f .

La formule de Parseval permet d'écrire : $(E_f)^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$.

On obtient une valeur approchée de E_f en ne prenant pas en compte les harmoniques d'ordre supérieur ou égal à 6. On obtient alors une valeur approchée P du carré de la valeur efficace de f par la formule : $P = c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=5} c_n^2$.

Donner, en utilisant le tableau ci-dessus, une approximation décimale à 10^{-4} près de P .

GROUPEMENT B DES BTS	SESSION 2009
Mathématiques	MATGRB2
Durée : 2 heures	Page : 4/5

5° Comparaison avec la valeur exacte de la valeur efficace de f

a) On rappelle que $(E_f)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt$.

Montrer que $(E_f)^2 = \frac{\pi^2}{6}$.

b) Dédurre des questions précédentes une valeur approchée arrondie à 10^{-3} du rapport $\frac{P}{(E_f)^2}$.

On peut observer ici que $\frac{P}{(E_f)^2}$ est inférieur à 0,95. On constate ainsi que l'abandon des harmoniques d'ordre supérieur à 5 ne fournit pas une excellente approximation de $(E_f)^2$ dans le cas où, comme ici, les valeurs de c_n ne décroissent pas rapidement.

Formulaire pour les séries de Fourier

f : fonction périodique de période T .

Développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n \omega t) + b_n \sin(n \omega t)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i k \omega t}, \quad (n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt ; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(n \omega t) dt ;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin(n \omega t) dt.$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-i k \omega t} dt \quad (k \in \mathbb{Z}) ; \quad c_0 = a_0 ;$$

$$\frac{a_n - i b_n}{2} = c_n ; \quad \frac{a_n + i b_n}{2} = c_{-n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

GRUPEMENT B DES BTS	SESSION 2009
Mathématiques	MATGRB2
Durée : 2 heures	Page : 5/5

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

BTS : groupement B

CONCEPTION ET INDUSTRIALISATION EN MICROTECHNIQUES

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \text{ où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \text{ où } t > 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}), \quad \text{cht} = \frac{1}{2} (e^t + e^{-t})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}), \quad \text{sht} = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t})$$

$$e^{at} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\operatorname{ch} t$	$\operatorname{sh} t$
e^t	e^t	$\operatorname{sh} t$	$\operatorname{ch} t$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbf{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\operatorname{Arc} \sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$	$\operatorname{Arc} \tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$\cos t$	$-\sin t$	$e^{at} \ (a \in \mathbf{I}, \mathbf{C})$	ae^{at}
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

d) Développement limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \dots$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt} \dots$ où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ax^2 + bx + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
de discriminant Δ	