SERVICES CULTURE ÉDITIONS
RESSOURCES POUR
L'ÉDUCATION NATIONALE

Ce document a été numérisé par le CRDP de Bordeaux pour la
Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel

Campagne 2009

Ce fichier numérique ne peut être reproduit, représenté, adapté ou traduit sans autorisation.

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
INFORMATIQUE DE GESTION

Options : - Développeur d'applications
- Administrateur de réseaux locaux d'entreprise

SESSION 2009

SUJET

ÉPREUVE E2 – MATHÉMATIQUES I

Durée : 3 heures **coefficient : 2**

Calculatrice autorisée, *conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :*
« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.
Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Il comprend :

- **5 pages numérotées de la page 1/5 à 5/5.**
- **le formulaire de mathématiques composé de 4 pages.**

EXERCICE N°1 (4 points)

La société ***K-Gaz*** décide de recruter en interne des collaborateurs pour sa filiale en Extrême-Orient.

Pour chaque employé, on définit les variables booléennes suivantes :
$a = 1$ s'il a plus de cinq ans d'ancienneté dans l'entreprise ;
$b = 1$ s'il possède un B.T.S. informatique de gestion (BTS-IG) ;
$c = 1$ s'il parle couramment l'anglais.

La direction des ressources humaines décide que pourront postuler les employés :
qui satisfont aux trois conditions,
ou qui ont moins de 5 ans d'ancienneté mais qui maîtrisent l'anglais,
ou qui ne maîtrisent pas l'anglais mais qui possèdent un BTS-IG.

1. Écrire une expression booléenne E traduisant les critères de la direction.
2. Représenter l'expression E par un tableau de Karnaugh.
3. À l'aide du tableau de Karnaugh, donner une expression simplifiée de E.
4. Retrouver ce résultat par le calcul.
5. Déduire des questions 3 ou 4 une version simplifiée des critères de la direction.

EXERCICE N°2 (8 points)

Tous les résultats seront arrondis à la quatrième décimale.
La société ***K-Gaz*** produit des bonbonnes de gaz de volume utile 44 dm^3.

Partie A

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque bonbonne tirée au hasard dans la production, associe sa contenance en dm^3.
On admet que la variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(44 ; 0,2)$ de moyenne $m = 44$ dm^3 et d'écart-type $\sigma = 0,2$ dm^3.

1. Quelle est la probabilité que la contenance d'une bonbonne choisie au hasard soit inférieure à 44,3 dm^3 ?
2. Quelle est la probabilité que la contenance d'une bonbonne choisie au hasard soit comprise entre 43,8 dm^3 et 44,3 dm^3 ?

Partie B

Dans cette partie, on admet que 5 % des bonbonnes n'ont pas la contenance nécessaire, et sont donc jugées non conformes.
Les grossistes achètent les bonbonnes par lots de 10.

1. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile le prélèvement au hasard de 10 bonbonnes à un tirage avec remise. Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 10 bonbonnes, associe le nombre de bonbonnes non conformes.

   a) Expliquer pourquoi Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10 ; 0{,}05)$.

   b) Quelle est la probabilité que, dans un lot de 10, il n'y ait aucune bonbonne non conforme ?

   c) Quelle est la probabilité que, dans un lot de 10, il y ait au plus deux bonbonnes non conformes ?

2. Une association de consommateurs achète 10 lots (donc 100 bonbonnes) pour contrôler leur contenance. Elle affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux que, parmi ces cent bonbonnes, il y ait au moins cinq bonbonnes non conformes.

   Soit Y' la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 bonbonnes prélevées au hasard dans la production, associe le nombre de bonbonnes non conformes.
   On admet que Y' suit la loi binomiale $\mathscr{B}(100 ; 0{,}05)$.

   a) Quelle est l'espérance mathématique $E(Y')$ et l'écart-type $\sigma_{Y'}$ de la variable Y' ?

   b) La loi de probabilité de Y' peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. On notera Z la variable aléatoire suivant cette loi de Poisson.
   Déterminer la valeur de λ.

   c) Calculer à l'aide de cette loi de Poisson la probabilité $P(Z \leq 4)$, avec la précision permise par la table.
   L'affirmation de l'association de consommateurs est-elle fondée ?

Partie C

Pour parer toute critique, la société ***K-Gaz*** décide de procéder à un contrôle de conformité. Toute bonbonne non conforme sera rejetée.
On admet toujours que 5 % des bonbonnes sont non conformes.
Si la bonbonne est non conforme, elle sera rejetée avec une probabilité de 0,92.
Si la bonbonne est conforme, elle sera acceptée avec une probabilité de 0,96.
On note :
C l'événement : « la bonbonne est conforme » ;
$\overline{C}$ l'événement : « la bonbonne est non conforme » ;
A l'événement : « la bonbonne est acceptée à l'issue du contrôle » ;
$\overline{A}$ l'événement : « la bonbonne est rejetée à l'issue du contrôle ».

1. En utilisant les informations de l'énoncé, déterminer les probabilités $P(C)$, $P(\overline{C})$, $P_C(A)$ et $P_{\overline{C}}\left(\overline{A}\right)$.

Dans la suite, on pourra s'aider d'un arbre.

2. Calculer la probabilité de l'événement : « la bonbonne est conforme et acceptée ».
3. Calculer la probabilité de l'événement : « la bonbonne est acceptée »
4. Sachant que la bonbonne est rejetée, quelle la probabilité qu'elle soit non conforme ?

EXERCICE N°3 (8 points)

L'entreprise ***K*-gaz** fabrique et commercialise également un produit chimique. Pour des raisons pratiques, sa production mensuelle ne peut pas excéder 10 tonnes.

Partie A - Étude du coût total de production .

1. L'entreprise ***K*-gaz** a relevé le coût total de production mensuel (en k€), noté y, en fonction de la production x (en tonnes). Le nuage de points correspondant figure en annexe.

x	1	2	4	6	8	10
y	32,5	38,5	44,6	48,4	51,1	53,3

   a) Le nuage ne semblant pas totalement se prêter à un ajustement affine on décide de poser : $z = e^{0,1y}$.
   Compléter sur la feuille annexe le tableau reproduit ci-dessous en arrondissant les valeurs de z au centième.

x	1	2	4	6	8	10
z	25,79	46,99				

   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients à la première décimale).
   c) Expliquer pourquoi cet ajustement semble justifié.

2. a) Utiliser le résultat de la question 1.b) pour obtenir une expression de y en fonction de x.
   b) En utilisant cette équation, estimer le coût total correspondant à une production de 7 tonnes.

Partie B - Étude de la recette et du bénéfice

L'entreprise ***K*-gaz** vend chaque tonne de ce produit chimique au prix de 8 k€.

1. a) On désigne par $R(x)$ la recette en k€ correspondant à x tonnes vendues. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
   b) Représenter graphiquement cette fonction dans le repère en annexe.
   c) On admet que le coût en k€, noté $C(x)$, correspondant à une production de x tonnes, est donné par l'expression : $C(x) = 10\ln(20x + 6,4)$.
   Expliquer pourquoi le bénéfice mensuel de l'entreprise (en k€), noté $B(x)$, correspondant à x tonnes produites et vendues, est donné par la relation : $B(x) = 8x - 10\ln(20x + 6,4)$.

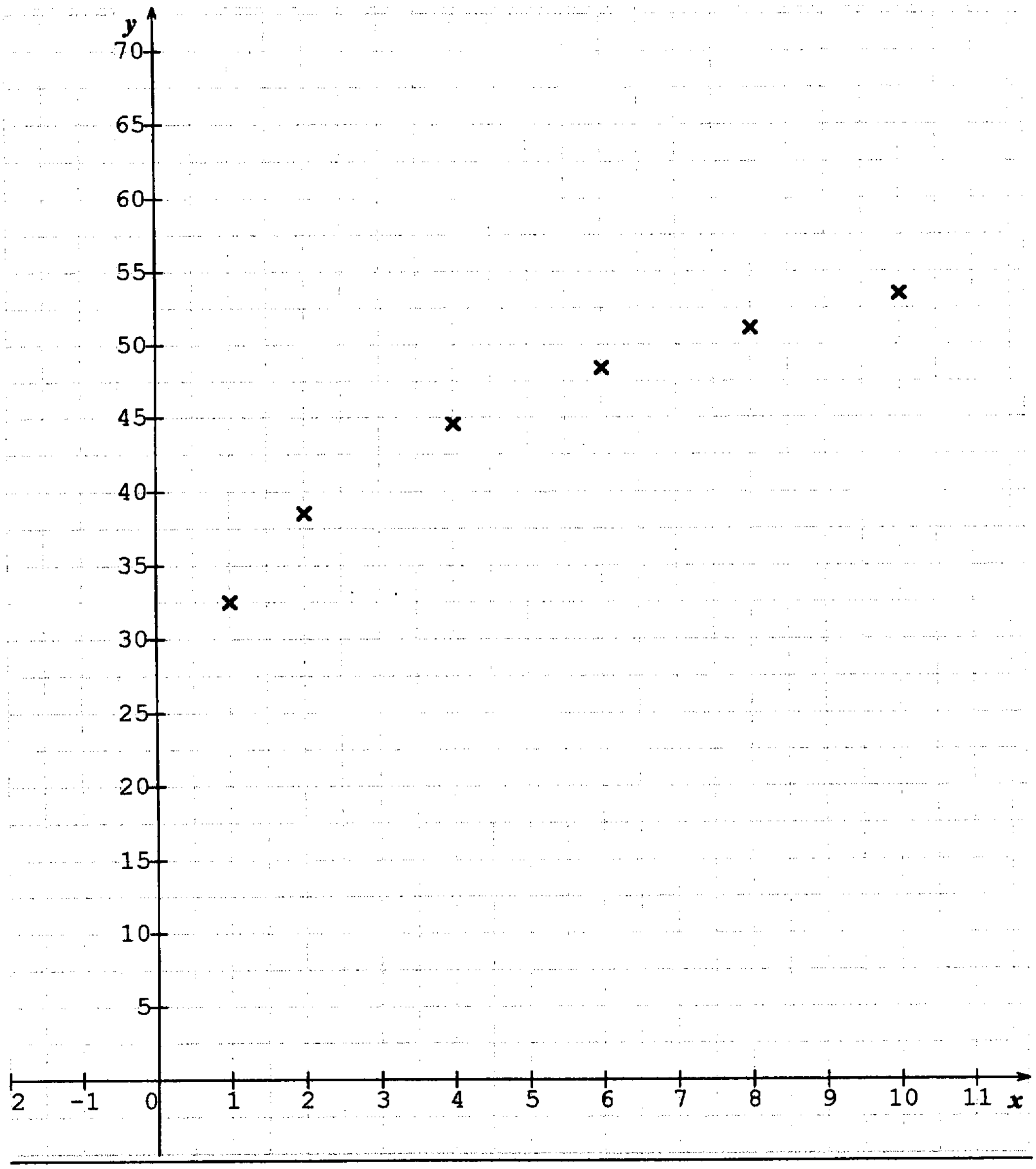
2. On considère la fonction B définie sur [0,10] par l'expression : $B(x) = 8x - 10\ln(20x + 6,4)$.
   a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [0,10] on a : $B'(x) = \dfrac{160x - 148,8}{20x + 6,4}$.
   b) Étudier le signe de $B'(x)$ sur cet intervalle et dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle [0,10].
   c) Justifier que l'équation $B(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle [0,10].
   À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au centième par excès de α.

3. À partir de quelle quantité produite l'entreprise *K*-gaz réalisera un bénéfice (positif) ?

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 3

Partie A



Question 1.a)

x	1	2	4	6	8	10
z	25,79	46,99				

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS INFORMATIQUE DE GESTION

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES :*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$\left(e^u\right)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$ *:*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties (PROGRAMME FACULTATIF) *:*

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités (PROGRAMME FACULTATIF)

$$\mathrm{e}^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\,\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\,\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\,\varepsilon(t)$$

e) Équations différentielles (PROGRAMME FACULTATIF)

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$

3. *PROBABILITES* :

a) Loi binomiale $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

$E(X)=np$ $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) Loi exponentielle (PROGRAMME FACULTATIF)

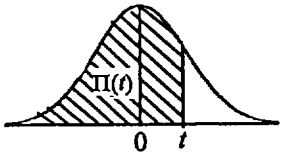
Fonction de fiabilité : $R(t)=e^{-\lambda t}$ $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE *t*

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
Π(*t*)	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$