SERVICES CULTURE ÉDITIONS
RESSOURCES POUR
L'ÉDUCATION NATIONALE

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel

Campagne 2009

SESSION 2009

BREVET DE TECHNICIEN

COLLABORATEUR D'ARCHITECTE

MATHEMATIQUES

Durée *: 3 heures*

Coefficient *: 5*

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le formulaire de mathématiques est joint au sujet.

IMPORTANT : *Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3 + la page de présentation.*
Assurez-vous qu'il est complet ; s'il est incomplet,
veuillez le signaler au surveillant de la salle qui vous en donnera un autre exemplaire.

Exercice 1 (4 points)

On considère le polynôme défini sur l'ensemble IR des nombres réels par $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$.

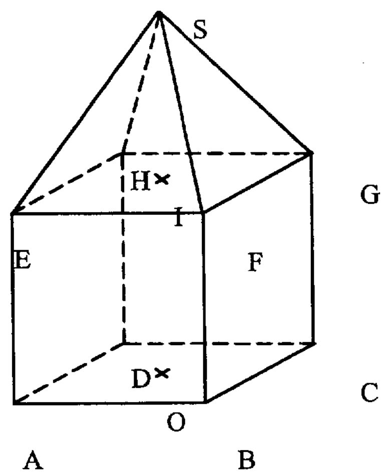
1) Calculer $f(4)$.
2) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = (x-4)(x^2 + 3x + 2)$.
3) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
4) En déduire la résolution dans IR de l'équation suivante : $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 10\ln x - 8 = 0$.

Exercice 2 (4 points)

Un élément décoratif dans un musée a la forme d'un cube ABCDEFGH surmonté d'une pyramide régulière à base carrée SEFGH telle que SE=SF=SGH=SH.

I est le centre du carré EFGH, O est le centre du carré ABCD.

On admet que S, I et O sont alignés.



Les longueurs sont exprimées en mètres.

SO = 4 , AB = BC = AE = x.

1) Exprimer la hauteur SI de la pyramide SEFGH en fonction de x.
2) Montrer que le volume de la pyramide SEFGH est $V=\frac{1}{3}(4x^2 - x^3)$.
3) On considère la fonction f définie sur [0 ; 4] par $f(x) = 4x^2 - x^3$.
   a) Etudier les variations de la fonction f.
   b) Déterminer la valeur de x pour laquelle le volume de la pyramide est maximal.
   c) Déterminer alors ce volume maximal.
   d) En déduire le volume, en m^3, de l'élément décoratif.

Problème (12 points)

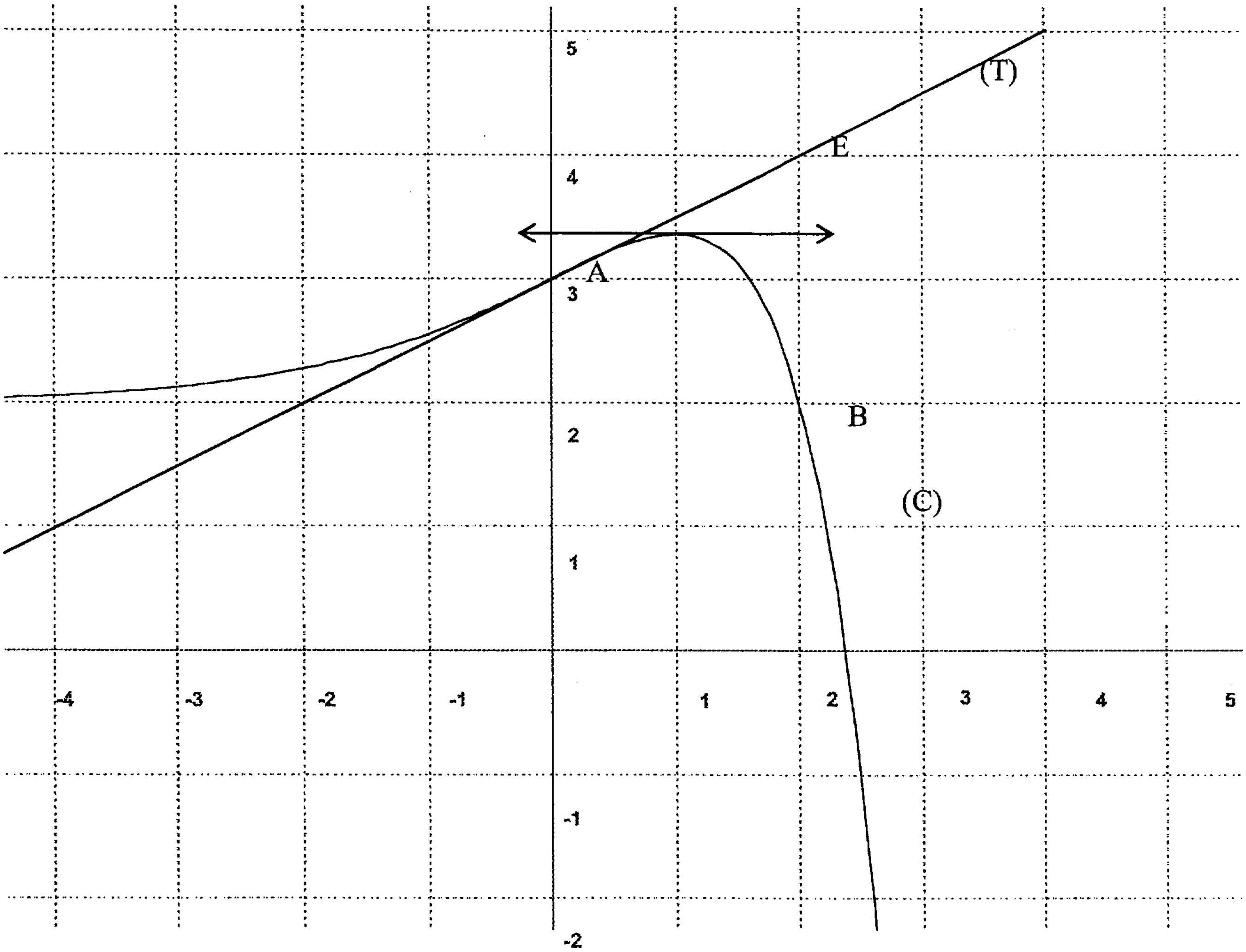
On considère la fonction f définie sur IR , dont une partie de la courbe représentative (C), dans le plan rapporté à un repère orthonormal, est donnée ci-dessous .

Le point A a pour coordonnées (0 ; 3) et le point B a pour coordonnées (2 ; 2).

A et B sont des points de la courbe (C) .

La droite (T) passe par A et le point E de coordonnées (2 ; 4).

La courbe (C) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.



Partie A

1) En utilisant les données précédentes, déterminer $f(0)$, $f(2)$ et $f'(1)$.

2) Sachant que la droite (T) est tangente en A à la courbe (C) , déterminer $f'(0)$.

3) A l'aide du graphique, déterminer :

a) un encadrement par deux entiers consécutifs de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

b) un encadrement par deux entiers consécutifs du maximum de f .

4) On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = axe^x + be^x + 2$ où a et b sont deux réels non nuls.

Sachant que la courbe (C) passe par les points A et B déterminer a et b .

Partie B

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0{,}5xe^x + e^x + 2$.

1)

a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.(On remarquera que $f(x) = (-0{,}5x+1)e^x + 2$.)

b) Montrer que la droite (D) d′ équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe (C) en $-\infty$.

c) Etudier la position relative de (D) et (C) .

2)

a) Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=0{,}5e^x(1-x)$.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f.

c) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A d'abscisse 0

Partie C

1) Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = (x-1)e^x$ est une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$.

2) En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

3) Calculer l′ aire, en unités d′ aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C), l′ axe des abscisses et les droites d′ équations $x = 0$ et $x = 2$. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.