SERVICES CULTURE ÉDITIONS
RESSOURCES POUR
L'ÉDUCATION NATIONALE

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel

Campagne 2009

BT AGENCEMENT

MATHÉMATIQUES

SESSION 2009

DURÉE : 3 heures

COEFFICIENT : 4

Matériel autorisé :

- Toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante conformément à la circulaire n° 99-186 du 16/11/1999.

Document à rendre avec la copie :
Papier millimétré

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4

Exercice 1 (4 points)

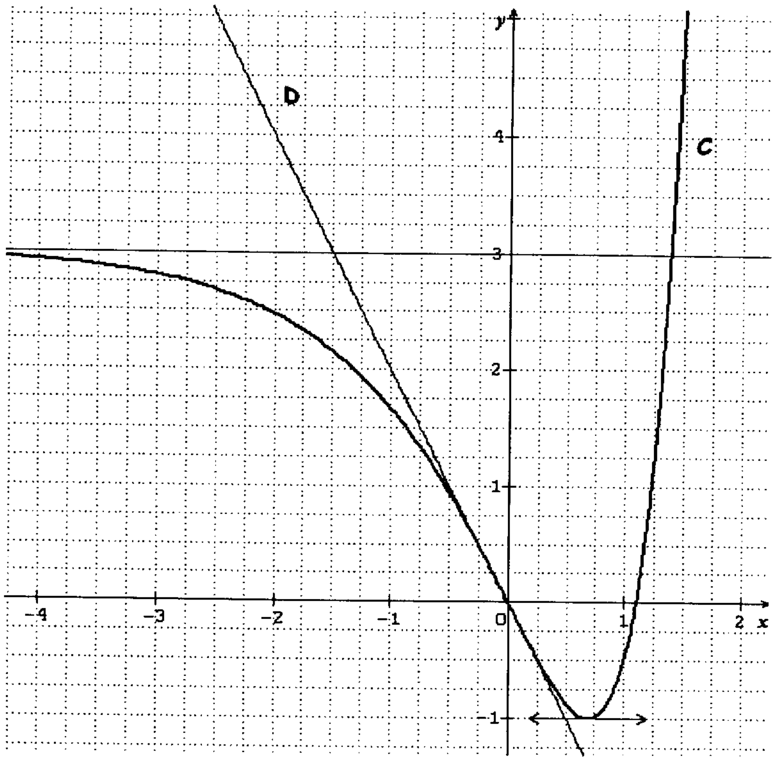
La courbe **C**, ci-contre, est la représentation graphique d'une fonction f définie sur **R**.

La courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\ln(2)$.

La droite **D** est tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

La fonction f' est la fonction dérivée de la fonction f.



Partie A : *Lecture graphique*
Par lecture graphique et sans justification donner :

1) $f(0)$, $f(\ln(2))$ et $f'(0)$.

2) Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

3) L'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \geq 0$.

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Partie B : *Résolution de l'équation* $f(x) = 0$.
La fonction f représentée ci-dessus est définie sur **R** par $f(x) = e^{2x} - 4\,e^{x} + 3$.

1) Résoudre l'équation : $X^2 - 4X + 3 = 0$.

2) En déduire les valeurs exactes des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 2 (7 points)

Sur le croquis ci-dessous, un agenceur a représenté le plateau d'un comptoir d'accueil de la clientèle d'un magasin.
La longueur EF est 60 cm et la mesure de l'angle $\widehat{FCE}$ est 30 degrés.

1) En utilisant les annotations de l'agenceur :
 a. Calculer EC et FC en valeurs exactes.
 b. Dessiner le plateau du comptoir à l'échelle 1/20.

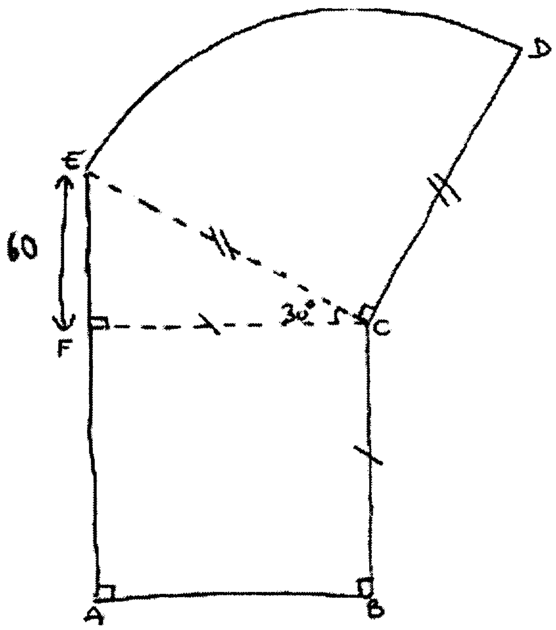
2) Calculer la valeur exacte de l'aire de ce comptoir puis en donner la valeur arrondie à 10^{-2}.

3) Calculer la valeur exacte du périmètre du comptoir puis en donner la valeur arrondie à 10^{-1}.

4) Le dessus du comptoir et son chant plat sont recouverts d'une feuille de stratifié.

Sachant que le comptoir a une épaisseur de 40 mm, calculer l'aire totale de stratifié nécessaire à la réalisation du plateau du comptoir.
Vous donnerez la valeur exacte, puis la valeur exprimée en m² arrondie au cm².

Attention, le schéma n'est pas réalisé à l'échelle



Problème (9 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[3,5\ ;+\infty[$, par $f(x) = \dfrac{x^2-2x-2}{x-3}$.

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1) **a.** Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[3,5\ ;+\infty[$, $f(x) = x+1+\dfrac{1}{x-3}$.

b. Montrer que la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe C.

2) **a.** Soit f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[3,5\ ;+\infty[$.

Calculer $f'(x)$ et montrer que : $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

c. En déduire le tableau de variation de f.

3) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 5.

4) **a.** Recopier et compléter le tableau suivant (les valeurs seront arrondies au dixième).

x	3,5	4	4,5	5	5,5	6	7	8
$f(x)$	6,5		6,2		6,9		8,3	

b. Tracer D, T et C.

5) Soit E l'ensemble des points $M(x\ ;y)$ tels que : $\begin{cases} 4 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$.

a. Hachurer l'ensemble E.

b. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + \ln(x-3)$ est une primitive de f sur l'intervalle $[3,5\ ;+\infty[$.

c. Calculer la valeur exacte de l'aire de E en unités d'aire, puis arrondie au mm².

BREVET DE TECHNICIEN
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

Ce formulaire concerne les brevets de technicien préparés en deux ans après la seconde de détermination.

I. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = b\,u_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \ldots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

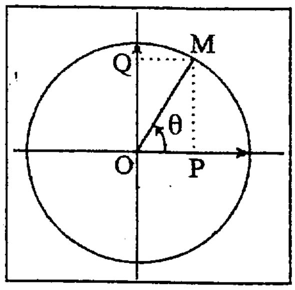
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

D. *TRIGONOMÉTRIE*



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'addition

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$; $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

II. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,
$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$(e^a)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,
$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(f+g)' = f' + g'$

$(kf)' = kf'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$

Intégration d'une inégalité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$

Valeur moyenne de f *sur* [a ,b] : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équation	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$