BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

Épreuve de Mathématiques

GROUPEMENT C

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENT
Agroéquipement	1
Charpente-couverture	1,5
Communication et industrie graphique	2
Étude et réalisation d'outillages de mise en forme des matériaux	2
Industries céramiques	2
Industries céréalières	2
Industries des matériaux souples (2 options)	1
Industries papetières	2
Mise en forme des alliages moulés	2
Mise en forme des matériaux par forgeage	2
Productique bois et ameublement	1,5
Productique textile (4 options)	3
Réalisation d'ouvrages chaudronnés	2
Systèmes constructifs bois et habitat	1,5

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4,
le formulaire de mathématiques page 1 à 5.

Une feuille de papier millimétré sera distribuée avec la copie

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

CALCULATRICE AUTORISÉE

Sont autorisées toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimantes.
Le candidat n'utilise qu'une seule machine sur la table. Toutefois, si celle-ci vient à connaître une défaillance, il peut la remplacer par une autre.
Afin de prévenir les risques de fraude, sont interdits les échanges de machines entre les candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices.

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

B.T.S. : groupement C

AGROÉQUIPEMENT

CHARPENTE-COUVERTURE

COMMUNICATION ET INDUSTRIE GRAPHIQUE

ÉTUDE ET RÉALISATION D'OUTILLAGES DE MISE EN FORME DES MATÉRIAUX

INDUSTRIES CÉRAMIQUES

INDUSTRIES CÉRÉALIÈRES

INDUSTRIES DES MATÉRIAUX SOUPLES (2 OPTIONS)

INDUSTRIES PAPETIÈRES

MISE EN FORME DES ALLIAGES MOULÉS

MISE EN FORME DES MATÉRIAUX PAR FORGEAGE

PRODUCTIQUE BOIS ET AMEUBLEMENT

PRODUCTIQUE TEXTILE (4 OPTIONS)

RÉALISATION D'OUVRAGES CHAUDRONNÉS

SYSTÈMES CONSTRUCTIFS BOIS ET HABITAT

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\text{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\text{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
t^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	e^{at} $(a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(ku)' = ku'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$
$$\left(e^u\right)' = e^u u'$$
$$(\ln u)' = \frac{u'}{u},\ u \text{ à valeurs strictement positives}$$
$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

3. PROBABILITES

a) **Loi binomiale** $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) **Loi exponentielle**

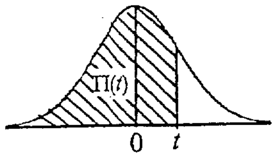
Fonction de fiabilité : $R(t) = e^{-\lambda t}$ $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$

Exercice 1 (10 points)

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y''+2y'+y=3$ où y désigne une fonction de la variable x définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels, y' désigne sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1) Déterminer une solution constante de l'équation (E).
2) Résoudre l'équation (E).
3) La courbe C représentée en annexe est la représentation graphique d'une solution f de l'équation différentielle (E). En utilisant les propriétés graphiques de cette courbe, déterminer l'expression de $f(x)$.

Partie B : Etude statistique

Un nuage de points est dessiné sur le graphique donné en annexe. Les coordonnées de ces points sont données dans le tableau :

x	2,3	1,4	-0,6	2,9	-0,3	-0,8	0,8	0,1
y	3,8	4,4	1,6	3,5	3,8	1,3	4,8	4,9

Ce nuage de points a la même allure que la courbe C représentant la fonction f.

On cherche à déterminer si ce nuage de points peut être ajusté par une courbe représentant une solution de l'équation différentielle (E).

On effectue pour cela le changement de variable : $z = (y - 3)\,e^x$

1) Compléter le tableau donné en annexe avec les valeurs de z arrondies au dixième.
2) Construire sur papier millimétré le nuage de points de coordonnées (x ; z). Que peut-on observer ?
3) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x, ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de z en x (on ne demande pas le détail des calculs ; les résultats numériques seront arrondis au centième).
4) Le nuage de points peut-il être ajusté par une courbe représentant une fonction solution de l'équation (E) ? Si oui, donner cette solution.

Exercice 2 (10 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Les résultats obtenus seront arrondis au centième.

Dans un centre d'assistance par téléphone, chaque client doit patienter avant d'être mis en relation avec un conseiller.

Partie A

On admet que 5% des clients attendent plus de 8 minutes.
Un sondage réalisé par ce centre téléphonique consiste à demander à 60 clients choisis au hasard s'ils ont attendu plus de 8 minutes. On suppose que les durées d'attente des clients sont indépendantes les unes des autres et que le nombre de clients est suffisamment grand pour que ce choix au hasard soit assimilé à un tirage avec remise.

On note Y la variable aléatoire qui associe à cet échantillon, le nombre de clients ayant attendu plus de 8 minutes. On admet que Y suit la loi binomiale de paramètres n = 60 et p = 0,05.

On approche Y par une variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson.
Donner le paramètre de cette loi.
En utilisant la variable aléatoire Z, calculer une estimation de la probabilité qu'au moins 6 clients attendent plus de 8 minutes.

Partie B

Les clients se plaignant d'attendre trop longtemps, une enquête est alors effectuée sur un échantillon de 100 personnes pour vérifier la moyenne μ, exprimée en minutes, du temps d'attente.
Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

Temps d'attente en minutes	$[0;2[$	$[2;3[$	$[3;4[$	$[4;5[$	$[5;6[$	$[6;8[$	$[8;12[$
Nombres de clients	13	16	19	17	15	15	5

On admet que la répartition du nombre de clients est régulière dans chacun des intervalles.

1. Calculer la moyenne $\overline{d}$ de cet échantillon (on utilisera les centres des intervalles pour effectuer les calculs).

2. On se propose de construire un test unilatéral pour vérifier si le temps d'attente moyen n'est pas supérieur à 4 minutes.
On note D la variable aléatoire qui, à chaque client associe son temps d'attente, exprimé en minutes.
La variable D suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma = 2{,}4$.

On désigne par $\overline{\mathrm{D}}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 clients choisis au hasard associe la moyenne de leurs temps d'attente. Le nombre de clients est suffisamment élevé pour que l'on puisse assimiler ce choix de clients à un tirage avec remise.

L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 4$.

a) Déterminer l'hypothèse alternative H_1.

b) Sous l'hypothèse H_0, la variable aléatoire $\overline{\mathrm{D}}$ suit la loi normale de moyenne 4 et d'écart-type 0,24.
Déterminer sous cette hypothèse le nombre réel h positif tel que : $P(\overline{\mathrm{D}} \leq 4 + h) = 0{,}95$.

c) En déduire la règle de décision de ce test.

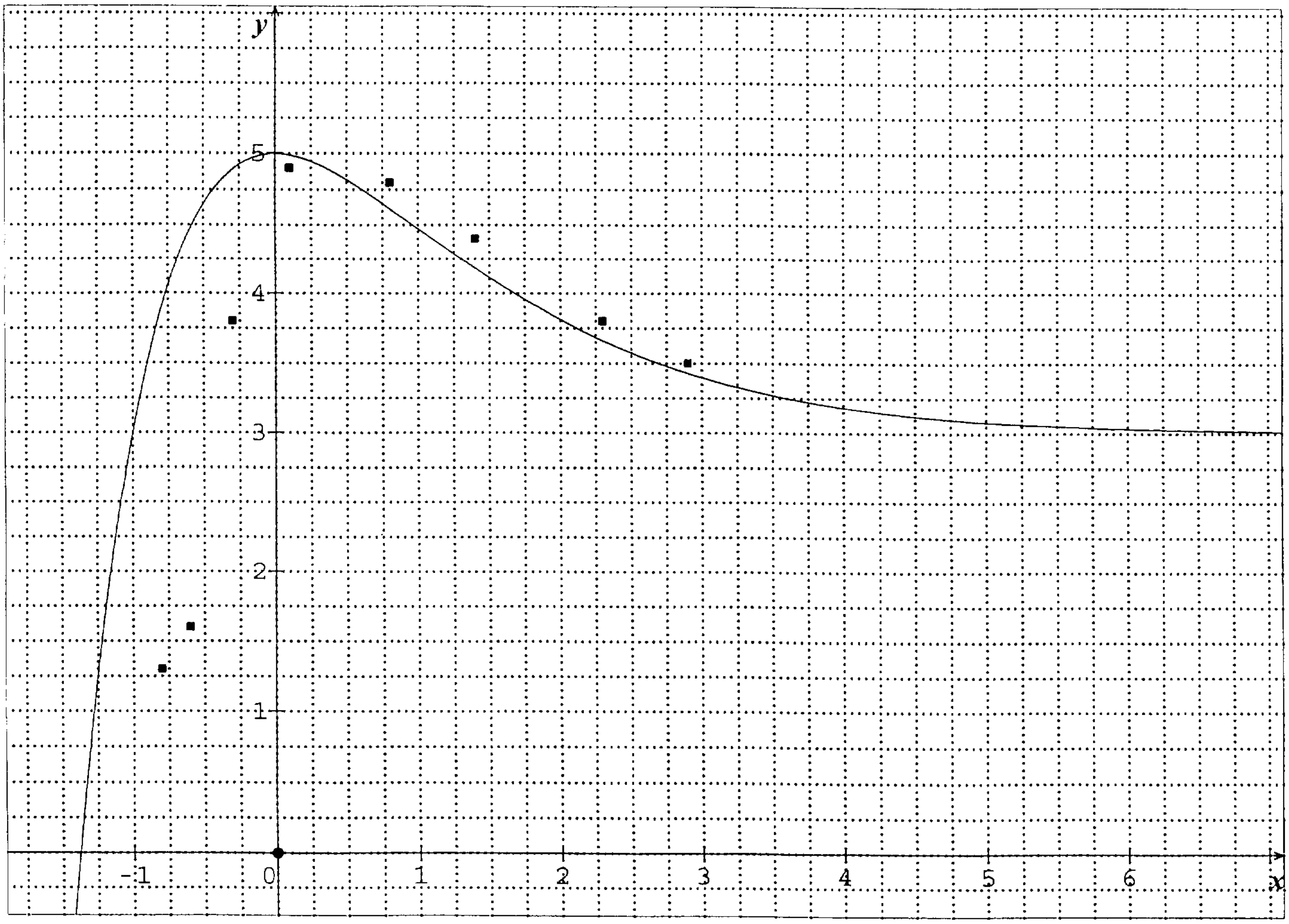
d) D'après l'échantillon étudié, peut-on au seuil de 5% conclure que la moyenne des temps d'attente n'est pas supérieure à 4 minutes ?

Annexe (à remettre avec la copie)

Exercice 1

Sur le graphique ci-dessous sont représentés :
- Une courbe *C*, utilisée dans la partie A de l'exercice 1.
- Un nuage de points utilisés dans la partie B de l'exercice 1.

(Les coordonnées des points de ce nuage sont données dans le tableau figurant sous le graphique)



Partie C

1)

Coordonnées des points du nuage de points

x	2,3	1,4	-0,6	2,9	-0,3	-0,8	0,8	0,1
y	3,8	4,4	1,6	3,5	3,8	1,3	4,8	4,9
$Z = (y-3)e^x$								