**SESSION 2010**

# BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

| SPÉCIALITÉ | COEF. | DURÉE |
|---|---|---|
| INFORMATIQUE ET RÉSEAUX POUR L'INDUSTRIE ET LES SERVICES TECHNIQUES | 3 | 3 |



# MATHÉMATIQUES

Le sujet comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.
Les pages 6 et 7 sont à rendre avec la copie.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.

*La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.*

**Code sujet**
**MATGRA2**

## Exercice 1 (10 *points*)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On rappelle qu'une courbe de Bézier associée à $n+1$ points de contrôle successifs $A_i$, $0 \leq i \leq n$, est l'ensemble des points $M(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\,\overrightarrow{OA_i} \quad \text{où} \quad B_{i,n}(t) = C_n^i\, t^i (1-t)^{n-i} \quad \text{avec } t \in [0;1].$$

**Partie A**

L'objectif de cette partie est d'étudier la courbe de Bézier $\mathscr{C}_1$ associée aux quatre points de contrôle successifs $A(4;0)$, $S(12;6)$, $R(0;6)$ et $O(0;0)$.

**1.** Développer, réduire et ordonner le polynôme $B_{2,3}(t)$.

**2.** On admet que :

$$B_{0,3}(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1$$
$$B_{1,3}(t) = 3t^3 - 6t^2 + 3t$$
$$B_{3,3}(t) = t^3.$$

Montrer que les coordonnées du point $M(t)$ de la courbe $\mathscr{C}_1$ sont :

$$\begin{cases} x = f_1(t) = 32t^3 - 60t^2 + 24t + 4 \\ y = g_1(t) = -18t^2 + 18t \end{cases} \quad \text{pour } t \in [0;1].$$

**3.** En utilisant la courbe $\mathscr{C}_1$ tracée sur le **document réponse n°1**, compléter le tableau des variations conjointes des deux fonctions $f_1$ et $g_1$ figurant sur ce même document réponse.

**4.** Calculer la dérivée de la fonction $g_1$.
En déduire la valeur $t_1$ du paramètre *t* pour laquelle l'ordonnée du point $M(t)$ est maximale.

**5.** Déterminer la valeur $t_0$ du paramètre *t* pour laquelle l'abscisse du point $M(t)$ est maximale.

**6.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AS}$ est tangent à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point A.

**Partie B**

On désigne par $a$ un nombre réel.

On souhaite compléter la figure du **document réponse n°1** avec une courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ en respectant les contraintes suivantes :

- les points de contrôle successifs de la courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ sont $\mathrm{O}(0;0)$, $\mathrm{E}(0;a)$, $\mathrm{F}\left(\frac{4}{3};-2\right)$ et $\mathrm{A}(4;0)$ ;
- la courbe $\mathscr{C}_2$ passe par le point $\mathrm{G}\left(1;-\frac{3}{2}\right)$ pour la valeur $\frac{1}{2}$ du paramètre $t$.

*Sous ce système de contraintes, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont des tangentes communes aux points* A *et* O.

**1.** Dans les conditions énoncées ci-dessus, la représentation paramétrique de la courbe $\mathscr{C}_2$ est de la forme :

$$\begin{cases} x = f_2(t) = 4t^2 \\ y = g_2(t) = 3(a+2)\,t^3 - 6(a+1)\;t^2 + 3at \end{cases} \quad t \in [0;1].$$

Montrer que $a = -2$.

**2.** Pour chaque valeur de $t$, l'algorithme de construction par barycentres successifs (appelé algorithme de De Casteljau), permet de construire le point de paramètre $t$ de la courbe de Bézier.

Utiliser cet algorithme, pour la valeur $\frac{1}{2}$ du paramètre $t$, pour retrouver graphiquement la position du point G.

**Laisser apparentes les étapes de la construction.**

**3.** Tracer la courbe $\mathscr{C}_2$ sur le **document réponse n°1**.

## Exercice 2 (10 *points*)

On considère un système physique dont l'état est modélisé par la fonction $y$ de la variable réelle $t$, solution de l'équation différentielle :

$$y''(t)+4y(t)=e(t) \qquad \textbf{(1)},$$

où la fonction $e$ représente une contrainte extérieure au système.



### Partie A

Dans cette partie, on suppose que $e(t)=20$ pour tout nombre réel $t$.
L'équation différentielle (1) s'écrit alors sous la forme :

$$y''(t)+4y(t)=20 \qquad \textbf{(2)}.$$

**1.** Déterminer la fonction constante $h$ solution particulière de l'équation différentielle **(2)**.

**2.** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle **(2)**.

**3.** En déduire l'expression de la fonction $f$ solution de l'équation différentielle **(2)** qui vérifie les conditions $f(0)=0$ et $f'(0)=0$.

### Partie B

Dans cette partie, on étudie un moyen d'amener le système vers un état d'équilibre de manière « lisse ».
À cette fin, on soumet le système à une contrainte extérieure modélisée par la fonction $e$ définie par :

$$e(t)=8tU(t)-8(t-\tau)U(t-\tau),$$

où $\tau$ désigne un nombre réel strictement positif.

On rappelle que la fonction échelon unité $U$ est définie par :

$$\begin{cases} U(t)=0 & \text{si } t<0 \\ U(t)=1 & \text{si } t\geq 0 \end{cases}.$$

Une fonction définie sur $\mathbf{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

On appelle $g$ la fonction causale telle que :

$$g''(t)+4g(t)=e(t)$$

et vérifiant :

$$g(0)=0 \text{ et } g'(0)=0.$$

On note $G(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $g$ et $E(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $e$.

**1.** Exprimer $E(p)$ en fonction de $p$ et de $\tau$.

**2.** En déduire que :

$$G(p)=\frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}\left(1-\mathrm{e}^{-\tau p}\right).$$

**3.** Déterminer les constantes réelles $A$ et $B$ telles que :

$$\frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p^2+4}.$$

**4.** Déterminer alors l'original de $\dfrac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}$.

**5.** En déduire que, pour tout nombre réel $t$ :

$$g(t)=g_0(t)-g_0(t-\tau) \qquad \text{avec } g_0(t)=(2t-\sin(2t))\,U(t).$$

**6.** Montrer que pour $t \geq \tau$, on a :

$$g(t)=2\tau-\sin(2t)+\sin(2t-2\tau).$$

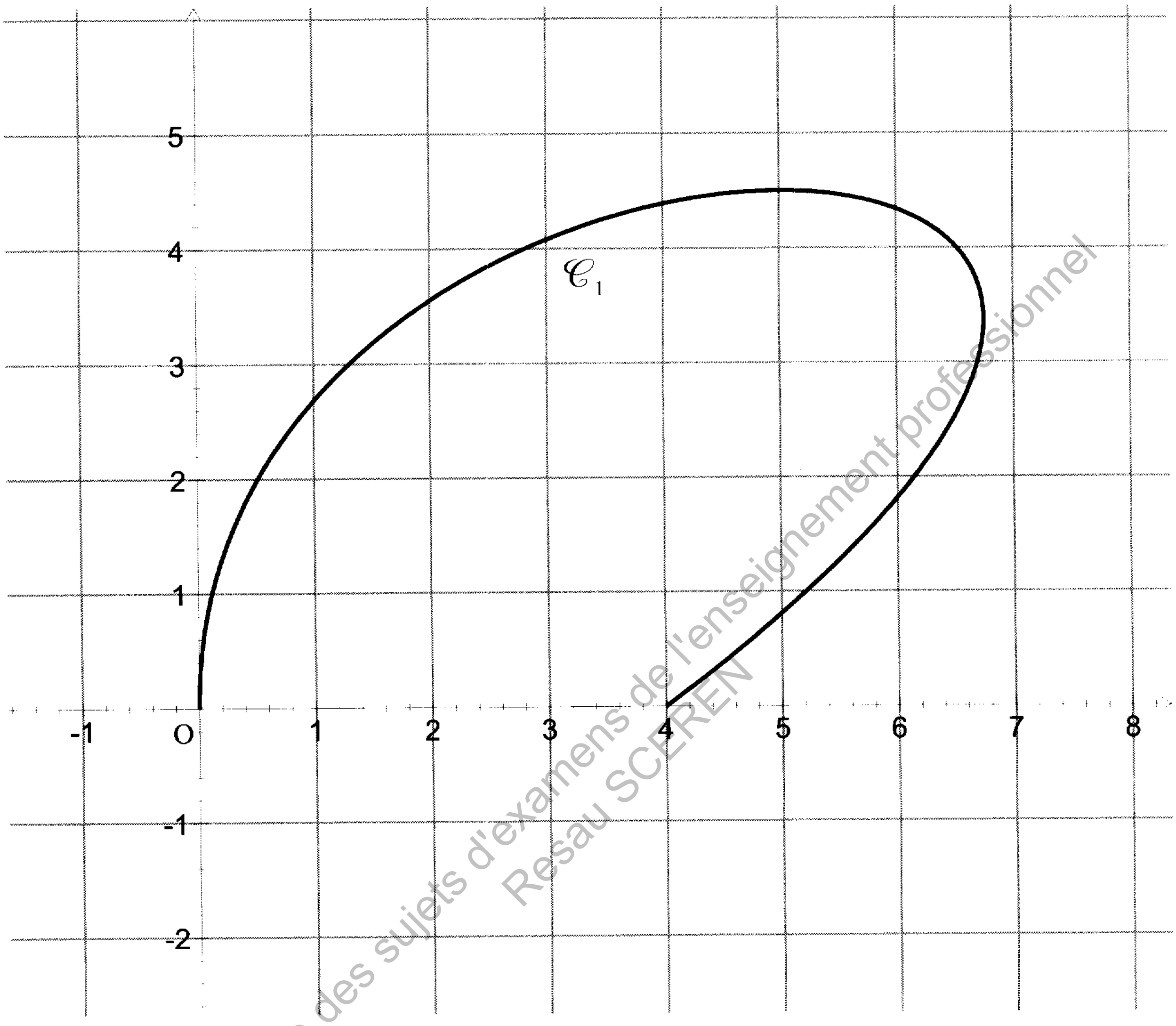
**7. On suppose maintenant que $\tau=\pi$.**

**a)** Simplifier l'expression de $g(t)$ pour $t \geq \tau$.

**b)** La courbe représentative de la fonction $e$, pour $\tau=\pi$, est tracée sur la figure du **document réponse n°2**.

Sur le même graphique, tracer la courbe représentative de la fonction $g$.

## Document réponse n°1, à rendre avec la copie (exercice 1)






| $t$ | 0 | | $t_0$ | | $t_1$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(t)$ | | + | 0 | | − | 0 |
| $g_1'(t)$ | | | | | | |
| $f_1(t)$ | | | | | | |
| $g_1(t)$ | | | | | | |

**Document réponse n°2, à rendre avec la copie (exercice 2)**