SESSION 2010

BREVET TECHNICIEN SUPÉRIEUR
CHIMISTE

Mathématiques

Durée : 2 heures
Coefficient : 3

Matériel autorisé :
Calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante et sans dispositif de communication externe (circulaire n° 99-186 du 16/11/99).

Aucun document autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5 et le formulaire de mathématiques numéroté 1 à 4 (agrafé avec le sujet).

Document à rendre avec la copie : annexe page 5.

Code sujet : **CHMAT – P/10**

EXERCICE 1 (9 points) :

On considère deux réactions totales et successives d'ordre 1 dans un milieu homogène. Celles-ci concernent trois produits A, B et C, le schéma est le suivant :

$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$ (k_1 et k_2 sont des constantes positives telles que $k_1 \neq k_2$).

On nomme x, y et z les concentrations relatives des produits A, B et C à l'instant t (en minutes), $t \geq 0$.
Les conditions initiales sont les suivantes : $x(0)=1$, $y(0)=0$ et $z(0)=0$.

Partie A
Détermination des concentrations

1°) L'étude cinétique permet d'abord d'écrire l'équation différentielle (1) : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -k_1 x$

a) Résoudre l'équation (1).

b) Déterminer la solution qui vérifie la condition initiale $x(0)=1$.

2°) L'étude cinétique permet ensuite d'écrire l'équation (2) : $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + k_2\, y = k_1\, \mathrm{e}^{-k_1 t}$.

a) Trouver un réel α tel que la fonction f définie par $f(t) = \alpha\, \mathrm{e}^{-k_1 t}$ soit une solution particulière de l'équation (2).

b) Résoudre l'équation (2).

c) Déterminer la solution qui vérifie la condition initiale $y(0)=0$.

3°) D'après le principe de conservation de la matière, on a, pour tout nombre réel t positif :
$x(t)+y(t)+z(t) = x(0)+y(0)+z(0)$.

Exprimer alors $z(t)$ en fonction de t.

Partie B
Étude des variations des concentrations dans le cas où $k_1 = 0,5$ et $k_2 = 1$ (en min^{-1})

On a dans ce cas : $x(t)=\mathrm{e}^{-0,5t}$, $y(t)=\mathrm{e}^{-0,5t} - \mathrm{e}^{-t}$ et $z(t)=1-2\mathrm{e}^{-0,5t}+\mathrm{e}^{-t}$

1°) Quel est le sens de variation de la fonction x ?

2°) Après avoir montré que la dérivée y' de y est définie par

$$y'(t)=\mathrm{e}^{-0,5t}(-0,5+\mathrm{e}^{-0,5t}),$$

montrer que, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction y admet un maximum M que l'on déterminera ainsi que l'instant t_M tel que $y(t_M)$ = M.

3°) Étudier les variations de la fonction z sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On précisera la limite de z en $+\infty$.

EXERCICE 2 (11 points) : les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A

Un technicien étudie le courant d'électrolyse traversant une cellule contenant une solution d'un électrolyte donné. Il souhaite optimiser ce courant en faisant varier trois facteurs : la dilution de la solution, comprise entre 10% et 90%, la température de la solution, comprise entre 50°C et 80°C, et la surface de l'électrode comprise entre 5 et 10 cm².

Il va réaliser un plan d'expérience 2^3, sans tenir compte des interactions, construit selon l'algorithme de Yates.

Le courant traversant le circuit est ensuite mesuré et est exprimé par le rapport de ce courant à un courant servant de référence, ce qui permet de l'exprimer en pourcentage. Cette valeur Y est modélisée par une expression de la forme :

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \varepsilon$$

où l'on ne tient pas compte des interactions.
ε est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne nulle.

X_1 représente la dilution, X_2 la température et X_3 la surface de l'électrode.

On attribue les niveaux suivants aux facteurs :

Niveau	-1	+1
Dilution	10%	90%
Température	50° C	80° C
Surface	5 cm²	10 cm²

Les résultats des huit expériences sont les suivants :

Expérience	1	2	3	4	5	6	7	8
Dilution	10%	90%	10%	90%	10%	90%	10%	90%
Température	50° C	50° C	80° C	80° C	50° C	50° C	80° C	80° C
Surface	5 cm²	5 cm²	5 cm²	5 cm²	10 cm²	10 cm²	10 cm²	10 cm²
Courant	15 %	9%	61%	49%	17%	11%	64%	54%

1°) Compléter la matrice des effets sans interactions sur le tableau figurant dans l'annexe qui sera rendue avec la copie.

2°) Calculer une estimation ponctuelle des coefficients a_0 , a_1 , a_2 et a_3 et donner l'expression du modèle.

3°) Représenter graphiquement l'effet des facteurs X_1 et X_2.

4°) Que conseilleriez-vous au technicien afin d'obtenir un courant maximum ?

Partie B

Dans les conditions de l'expérience réalisée par le technicien, on peut considérer que la variable aléatoire X qui, à chaque électrode tirée au hasard, associe sa durée de vie exprimée en heures, suit la loi normale de moyenne 30 et d'écart-type 2.

1°) Quelle est la probabilité pour qu'une électrode prise au hasard ait une durée de vie d'au moins 30 heures ?

2°) Quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité pour qu'une électrode prise au hasard ait une durée de vie comprise entre 28 et 32 heures ?

3°) Sachant que la durée de vie d'une électrode est supérieure à 30 heures, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'elle soit supérieure à 35 heures ?

Partie C

Dans cette question les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une entreprise fabrique, en très grand nombre, des électrodes dont la surface, mesurée en cm^2, a pour moyenne inconnue μ et pour écart-type 0,18.

1°) Le technicien a reçu 10 électrodes de cette production. Il a mesuré les surfaces, en cm^2, des électrodes de cet échantillon extrait de la production de l'entreprise et il a obtenu les résultats suivants :

4,8 ; 5,3 ; 5,1 ; 5,0 ; 4,9 ; 5,0 ; 5,2 ; 4,8 ; 5,0 ; 5,2.

a) Calculer la moyenne des surfaces et, à 10^{-2} près, l'écart-type sur cet échantillon.

b) Donner une estimation ponctuelle de μ.

2°) On note $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon non exhaustif de 10 électrodes, associe la moyenne de la surface de ces 10 électrodes en cm^2.

On admet que $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\frac{0,18}{\sqrt{10}}$.

a) Donner un intervalle de confiance de μ avec un coefficient de confiance de 95%.

b) Peut-on affirmer que la moyenne μ appartient à cet intervalle ? Expliquer la réponse.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS CHIMISTE

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\operatorname{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\operatorname{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

d) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

3. PROBABILITES

a) **Loi binomiale** $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X)=np$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) **Loi exponentielle**

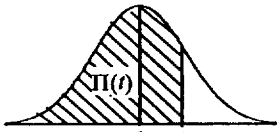
Fonction de fiabilité : $R(t)=e^{-\lambda t}$ $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Expériences	Moyenne	X_1	X_2	X_3	Passage du courant
1					15%
2					9%
3					61%
4					49%
5					17%
6					11%
7					64%
8					54%