SERVICES CULTURE ÉDITIONS
RESSOURCES POUR
L'ÉDUCATION NATIONALE

Ce document a été numérisé par le CRDP de Bordeaux pour la
Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel.

Campagne 2010

Ce fichier numérique ne peut être reproduit, représenté, adapté ou traduit sans autorisation.

crdp Aquitaine

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
GÉOMÈTRE/TOPOGRAPHE
Session 2010

MATHÉMATIQUES

Durée : 2 h **Coefficient : 2**

SUJET

Le sujet comporte 2 exercices indépendants qui seront traités sur des copies séparées.

Un formulaire de 4 pages est joint au sujet.

<u>*L'annexe est à joindre avec la copie.*</u>

Une feuille de papier millimétré est nécessaire.

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

crdp Aquitaine

EXERCICE 1 (9 points) : étude d'une courbe plane

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la courbe $\mathcal{C}$ définie par : $\begin{cases} x(t) &= t - \sqrt{2}\sin(t) \\ y(t) &= \cos(t) \end{cases}$, t décrivant $\mathbf{R}$.

On note M_t le point de coordonnées $\big(x(t)\,;y(t)\big)$ de $\mathcal{C}$.
Le but de cet exercice est d'étudier quelques aspects de $\mathcal{C}$ et d'en tracer l'allure.

A) Détermination de l'intervalle d'étude.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{M_tM_{t+2\pi}}$ est constant.
Comment déduit-on le point $M_{t+2\pi}$ du point M_t ? Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. Comparer les coordonnées de M_{-t} et celles de M_t.
Qu'en déduit-on pour les points M_{-t} et M_t, ainsi que pour la courbe $\mathcal{C}$?

3. Montrer que l'intervalle d'étude peut être restreint à $J = [0\,;\pi]$.

4. On nomme $\mathcal{C}_J$ la courbe décrite par M_t lorsque t décrit l'intervalle J.
Comment peut-on déduire $\mathcal{C}$ à partir de $\mathcal{C}_J$?

B) Étude de $\mathcal{C}_J$ avec $J = [0\,;\pi]$ et applications.

1. **(a)** Calculer $x'(t)$ et étudier le signe de $x'(t)$ sur J.

(b) Calculer $y'(t)$ et étudier le signe de $y'(t)$ sur J.

(c) Étudier les variations des fonctions x et y sur l'intervalle J.
On présentera les résultats de cette étude, en indiquant les valeurs exactes, dans le premier tableau figurant en **annexe à rendre avec la copie**.
On y portera aussi les valeurs de $x'(t)$ et $y'(t)$ aux bornes de l'intervalle.

2. **(a)** Préciser les points de $\mathcal{C}_J$ ayant des tangentes parallèles aux axes de coordonnées.

(b) Déterminer le point d'intersection de $\mathcal{C}_J$ avec l'axe des abscisses.

3. **(a)** Compléter le tableau de valeurs situé dans l'annexe.

(b) On se propose de tracer la partie de la courbe $\mathcal{C}$ correspondant à la variation de t dans $[-\pi\,;\pi]$.
Faire d'abord apparaitre $\mathcal{C}_J$ sur **la feuille de papier millimétré à rendre avec la copie** dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra pour unité graphique 2 centimètres.
On fera apparaitre les tangentes aux points de paramètres 0, $\dfrac{\pi}{4}$ et π .

(c) Sur la même figure, esquisser la partie de $\mathcal{C}$ correspondant à la variation de t dans $[-\pi\,;0]$.

crdp Aquitaine

EXERCICE 2 (11 points) : étude d'une route orthodromique

Préambule et notations

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la Terre est assimilée à une sphère Σ de centre O et de rayon 1.

L'équateur Γ est le cercle intersection de la sphère Σ et du plan Π d'équation $z = 0$.

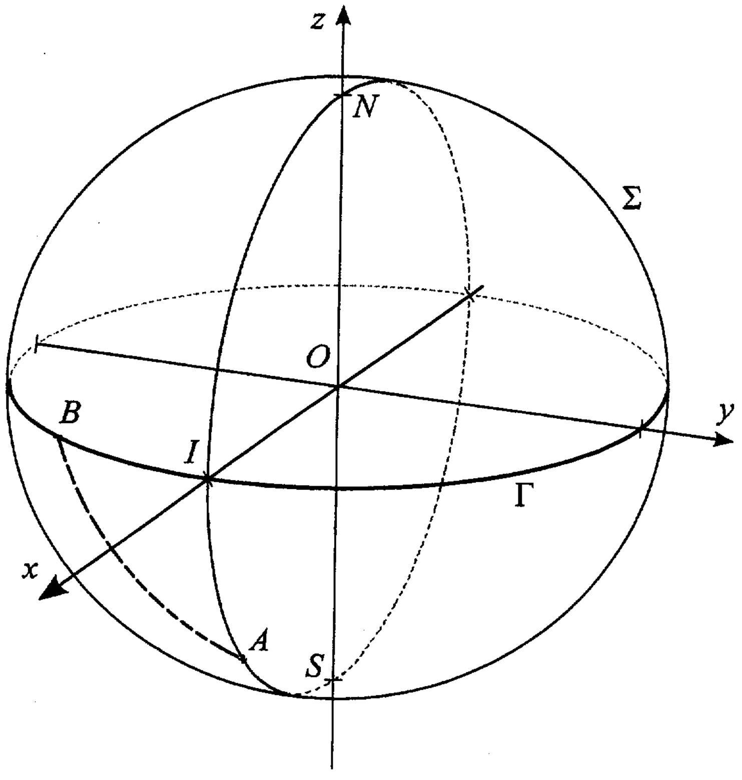
Tout point de Σ est alors repéré par le couple $(\theta\,;\varphi)$ où θ est sa longitude et φ sa latitude (en radians).

En navigation (terrestre ou aérienne) une **route orthodromique** désigne une trajectoire décrivant une partie d'un grand cercle du globe terrestre.

Soient les points $N(\theta = 0\,;\varphi = \frac{\pi}{2})$, $S(\theta = 0\,;\varphi = -\frac{\pi}{2})$, $I(\theta = 0\,;\varphi = 0)$ et $A(\theta = 0\,;\varphi = -\frac{\pi}{4})$.

Un navire partant de A se dirige vers le **nord-ouest** en suivant une route orthodromique qui coupe l'équateur au point B (voir la figure ci-dessous).

On admet que la longitude de B est négative et que l'angle $\widehat{A}$ du triangle sphérique AIB mesure $\frac{\pi}{4}$ radians.



Rappel

Pour un triangle sphérique ABC, avec les notations usuelles de la trigonométrie sphérique :

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{A}) &= -\cos(\widehat{B})\cos(\widehat{C}) + \sin(\widehat{B})\sin(\widehat{C})\cos(a) \\ \cos(a) &= \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\widehat{A}) \end{aligned}$$

crdp Aquitaine

A) Résolution du triangle sphérique AIB et position du point B.

1. On rappelle que l'angle $\widehat{A}$ vaut $\frac{\pi}{4}$. Justifier que $\widehat{I} = \frac{\pi}{2}$ et donner le côté $b = \widehat{AI}$.
2. Calculer une mesure en radians de l'angle $\widehat{B}$.
3. Montrer que $\cos(a) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
4. Montrer que les coordonnées cartésiennes de B sont : $(\sqrt{\frac{2}{3}}\,; -\frac{1}{\sqrt{3}}\,; 0)$.

B) Projection stéréographique de pôle sud.

On note $\mathcal{T}$ l'inversion de pôle S et de puissance 2.

On rappelle que pour tout point M différent de S on a $M' = \mathcal{T}(M)$ si et seulement si $\overrightarrow{SM'} = \frac{2}{SM^2}\,\overrightarrow{SM}$.

1. **Préliminaires.**
   (a) Calculer les coordonnées cartésiennes de A.
   (b) Déterminer l'image N' du point N.
   (c) Quelle est l'image de la sphère Σ privée du point S par l'inversion $\mathcal{T}$?
   (d) Montrer que tout point du cercle équatorial Γ est invariant par $\mathcal{T}$.
2. Justifier le fait que A' a pour coordonnées cartésiennes $(1+\sqrt{2}\,;0\,;0)$.
3. Soit Γ_1 le grand cercle passant par I et A. Quelle est l'image Γ_1' de Γ_1 par $\mathcal{T}$?
4. Soit Γ_2 le grand cercle passant par A et B et Γ_2' son image par $\mathcal{T}$. Justifier que Γ_2' est un cercle.
5. Représenter, sur la copie, dans le plan repéré par $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les cercles Γ et Γ_2' ainsi que les inverses par $\mathcal{T}$ des côtés du triangle sphérique AIB.
   On pourra éventuellement utiliser le point B_1 symétrique de B par rapport au point O.

crdp Aquitaine

— ANNEXE à rendre avec la copie —

Exercice 1 :

Tableau de variations du B-1.c)

t	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ π
$x'(t)$	
$x(t)$	
$y(t)$	
$y'(t)$	

Tableau de valeurs du B-3.a) (valeurs arrondies à 10^{-2} près).

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$x(t)$					
$y(t)$					

crdp Aquitaine

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS GEOMETRE-TOPOGRAPHE

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2\sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i\sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$,

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty$;

$\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t\to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t\to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t\to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t\to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

crdp Aquitaine

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\text{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\text{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$		
$\sin t$	$\cos t$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u'+v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v+uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$\left(e^u\right)' = e^u\, u'$$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) **Calcul intégral**

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt$$

d) **Développements limités**

$$e^t = 1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2+\cdots+(-1)^n t^n + t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots+(-1)^p\,\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}+t^{2p+1}\,\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots+(-1)^p\,\frac{t^{2p}}{(2p)!}+t^{2p}\,\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n+t^n\,\varepsilon(t)$$

3. *TRIGONOMETRIE SPHERIQUE*

$$\cos a = \cos b\ \cos c + \sin b\ \sin c\ \cos A$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\text{ıire}(ABC) = (A+B+C-\pi)\,R^2$$

crdp Aquitaine

4. PROBABILITES

a) Loi binomiale $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X)=np$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

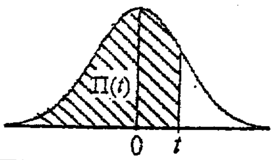
crdp Aquitaine

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE *t*

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
Π(*t*)	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$

crdp Aquitaine