BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

AGENCEMENT DE L'ENVIRONNEMENT ARCHITECTURAL

Session 2010

U31 - MATHÉMATIQUES
Durée : 2 h - Coefficient 2

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.
Le sujet est composé de 7 pages numérotées de 1/7 à 3/7.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 4 pages, numérotées de 4/7 à 7/7.
Une feuille de papier millimétré est nécessaire pour traiter l'exercice 2.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1 *(10 points)*

Dans une pièce, la température est de 22°C à 23 h quand on éteint le chauffage. Nous allons étudier l'évolution de la température dans cette pièce au cours de la nuit.
Nous supposerons que la température extérieure est constante, toujours égale à $T_{ext}=10°C$.
Soit t le temps écoulé depuis 23 h, exprimé en heures. La température dans le bureau est une fonction f de la variable t, définie sur l'intervalle [0 , 8]. Elle est solution de l'équation différentielle :

$$Cy' + \lambda y = \lambda T_{ext} ,$$

où C est la capacité thermique globale de la pièce et λ la conductivité thermique globale du mur donnant sur l'extérieur.
On admettra que l'équation s'écrit alors :

$$(E) \quad y' + 0{,}15y = 1{,}5 .$$

1. a) Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + 0{,}15y = 0 .$$

b) Déterminer une fonction constante g, sous la forme $g(t)=b$ où b est un nombre réel, qui soit solution particulière de l'équation *(E)*.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation *(E)*.

d) Déterminer la fonction f solution de l'équation *(E)*, qui vérifie la condition initiale :

$$f(0) = 22 .$$

2. On admettra dans la suite que f est la fonction définie sur [0 , 8] par :

$$f(t) = 10 + 12e^{-0{,}15t} .$$

a) Étudier les variations de la fonction f sur [0 , 8].

b) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. On prendra comme unités graphiques 2 cm pour 1 h en abscisse et 1 cm pour 1°C en ordonnée.

c) Au bout de combien de temps la température devient-elle inférieure à 16°C ? En déterminer la valeur exacte à l'aide d'une inéquation. Quelle heure sera-t-il (arrondir à l'heure près) ?

3. À chaque instant t, le flux de chaleur vers l'extérieur est donné, en MJh^{-1} (mégajoule par heure), par la fonction j définie sur [0 , 8] par :

$$j(t) = \lambda(f(t) - T_{ext}) = 2{,}88e^{-0{,}15t} .$$

L'énergie dissipée à l'extérieur entre 23 h et 7 h, exprimée en MJ, s'obtient en calculant :

$$E_d = \int_0^8 j(t)dt .$$

a) Calculer la valeur exacte E_d.
b) En donner une valeur approchée à 0,1 MJ près par défaut.

EXERCICE 2 *(10 points)*

Une entreprise effectue des travaux d'isolation chez des particuliers. Elle souhaite évaluer son potentiel d'activité dans une ville. Pour cela, elle demande à 100 personnes choisies au hasard de faire le test suivant : une pièce, préalablement portée à une température convenue, est laissée toute une nuit sans chauffage. Le matin, on relève sa température.
L'entreprise obtient comme résultats, arrondis au degré le plus proche :

Températures (°C)	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs	1	4	12	21	25	22	10	5

On distingue alors trois catégories de maisons, selon la température T relevée le matin :
- Si $18 \leq T$, l'isolation est satisfaisante (catégorie 1).
- Si $15 \leq T < 18$, des économies d'énergie pourraient être réalisées, mais elles ne compenseraient pas les coûts des travaux (catégorie 2).
- Si $T < 15$, les propriétaires ont tout intérêt à faire rénover l'isolation de leur maison (catégorie 3).

1. Sans justification, calculer la moyenne de la série statistique. Calculer ensuite une valeur arrondie de l'écart type de la série statistique à 0,1 près.

2. Soit X la variable aléatoire qui, à une maison choisie au hasard dans la ville, associe la température que l'on aurait relevée le matin, si la maison avait subi le test thermique.
On admet que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $m = 17$ et d'écart type $\sigma = 1{,}5$.

   On choisit une maison au hasard. Déterminer la probabilité à 0,0001 près, que :
   a) La maison soit dans la catégorie 3 ;
   b) La maison soit dans la catégorie 2.

3. On admet désormais que la probabilité qu'une maison soit dans la catégorie 3 est de 0,1.
L'entreprise s'intéresse principalement aux maisons de la catégorie 3. Chaque jour, des études thermiques sont menées dans 30 maisons choisies au hasard. La taille de la ville permettra de considérer les études comme étant indépendantes.
On définit une variable aléatoire Y qui, à un jour donné, associe le nombre de maisons de catégorie 3.
   a) Quelle loi de probabilité la variable aléatoire Y suit-elle ? Justifier votre réponse, en précisant les paramètres de cette loi.
   b) Calculer la probabilité qu'au plus deux études menées dans une journée diagnostiquent une maison de catégorie 3. Donner une valeur arrondie à 0,01 près.
   c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y. Que représente ce nombre ?

4. Pour faciliter les calculs, on approche la loi de probabilité Y par une loi de Poisson notée Z.
   a) Préciser le paramètre λ de cette loi.
   b) Calculer la probabilité qu'au moins 5 des études concernent des maisons de catégorie 3. Donner une valeur arrondie à 0,01 près. Quelle interprétation l'entreprise peut-elle faire de ce résultat ?

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
AGENCEMENT DE L'ENVIRONNEMENT ARCHITECTURAL

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

1. ***RELATIONS FONCTIONNELLES***

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

2. ***CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL***

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t\to-\infty} \mathrm{e}^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t\to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\sin t$	$\cos t$
e^t	e^t	$\cos t$	$-\sin t$
t^{α} $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

d) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$x'' + \omega^2 x = 0$	$x(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$

3. ***PROBABILITES***

a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

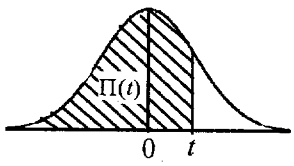
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) **Loi normale**

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$