CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

MATHÉMATIQUES
BTS – GROUPEMENT C – SESSION 2010

CORRIGE

EXERCICE 1 (12 points)

Questions	Éléments de correction	Commentaires	Points
A 1) a)	L'équation différentielle $2y''+y'-y=0$ est de la forme $ay''+by'+cy=0$. On résout l'équation du second degré : $2r^2+r-1=0$ qui admet pour solutions : $r_1=-1$ et $r_2=\frac{1}{2}$ Les solutions de $2y''+y'-y=0$ sont les fonctions définies sur **R** par : $h(x)=\alpha\,\mathrm{e}^{-x}+\beta\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ avec α et β deux nombres réels.		**2**
A 1) b)	On calcule la dérivée de g. On a : $g'(x)=a$ g est donc solution de (E) si et seulement si, pour tout réel x, on a : $2g''(x)+g'(x)-g(x)=-x+2$ donc si : $a-(ax+b)=-x+2$. Par identification on obtient le système : $\begin{cases}-a=-1\\ a-b=2\end{cases}$ donc $a=1$, $b=-1$ et $g(x)=x-1$		**1**
A 1) c)	Les solutions de (E) sont les fonctions sommes des fonctions solutions h de $2y''+y'-y=0$ et de la solution particulière g ; donc les solutions sont les fonctions définies sur **R** par : $f(x)=\alpha\,\mathrm{e}^{-x}+\beta\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+x-1$ avec α et β deux nombres réels.		**1**
A 2)	On cherche les réels α et β tels que $f(0)=0$ et $f'(0)=0$; On a $f'(x)=-\alpha\,\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\beta\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+1$. D'où le système : $\begin{cases}\alpha+\beta-1=0\\ -\alpha+\frac{1}{2}\beta+1=0\end{cases}$ donc $\alpha=1$ et $\beta=0$. On obtient $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}+x-1$.		**1**
B 1) a)	On détermine la dérivée f' de f. On obtient $f'(x)=-\mathrm{e}^{x}+1$; D'où $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{-x}<1 \Leftrightarrow -x<0 \Leftrightarrow x>0$. La fonction f' est strictement positive sur $]0;+\infty[$.		**1,5**

B 1) b)	On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.		**1**
B 1) c)	x : 0 … $+\infty$ $f'(x)$: $+$ f : 0 ↗ $+\infty$		**1**
B 2) a) b)	$f(x)-(x-1) = e^{-x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc la droite D est bien asymptote à la courbe *C*. De plus $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, donc la courbe est située au-dessus de la droite D.		**1**
B 3)	Construction de l'asymptote D et de la courbe *C*.		**1**
B 4)	$\int_0^2 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^2 = -e^{-2} + e^{0} = 1 - e^{-2}$. L'unité d'aire est ici 4 cm^2 donc l'aire cherchée, en cm^2 est égale à $A = 4 \int_0^2 e^{-x}\,dx = 4(1-e^{-2})$ $A \cong 3{,}46$ cm^2		**1,5**

EXERCICE 2 (8 points)

A 1.	$T = \dfrac{X-60{,}3}{\sigma}$ $P(59{,}5 \le X \le 61{,}1) = P(-2 \le T \le 2) = 2\pi(2) - 1 \approx 0{,}95$		**2**
A2.	$2\pi\left(\dfrac{0{,}8}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}99$ soit $\pi\left(\dfrac{0{,}8}{\sigma}\right) = 0{,}995$, à l'aide de la table $\dfrac{0{,}8}{\sigma} = 2{,}575$ donc $\sigma \approx 0{,}31$.		**2**
B.1.	Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}05$		**1**
B2.	$P(Y=3) = C_{80}^{3}\, 0{,}05^{3} \times 0{,}95^{0{,}77} \approx 0{,}2$		**1**
B3.	Le paramètre de cette loi de poisson est $P(Y \le 3) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3)$ $\approx 0{,}43$ $\lambda = np = 4$		**2**