



SERVICES CULTURE ÉDITIONS  
RESSOURCES POUR  
L'ÉDUCATION NATIONALE

Ce document a été numérisé par le CRDP de Bordeaux pour la  
Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel.

Campagne 2010

**BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR****GENIE OPTIQUE**  
**option PHOTONIQUE****Epreuve de PHYSIQUE APPLIQUEE****Sous-épreuve U42 : PHYSIQUE****Durée 2 heures 30****coefficient 2,5**

*La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**Matériel autorisé :****Calculatrice conformément à la circulaire n°99-186 du 16/11/1999**

*Sont autorisées toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimantes.*

*Le candidat n'utilise qu'une seule machine sur la table. Toutefois, si celle-ci vient à connaître une défaillance, il peut la remplacer par une autre.*

*Afin de prévenir les risques de fraude, sont interdits les échanges de machines entre les candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices.*

**Tout autre matériel est interdit**

*Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.  
Ce sujet comporte : 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7*

**Document à rendre avec la copie :  
ANNEXE .....page 7/7**

# PROFILOMETRIE PAR PROJECTION DE FRANGES.

## Introduction - Principes mis en œuvre

Mesurer la forme d'un objet présente beaucoup d'intérêts, aussi bien en ingénierie (topographie, contrôle de qualité) que dans d'autres secteurs d'activité (médecine ou arts). Pour caractériser la forme d'un objet, on utilise la fonction décrivant l'altitude  $z = f(x,y)$  de chaque point de sa surface.

La méthode par projection de franges permet des mesures sans contact. On réalise ces franges à l'aide d'un montage interférométrique (**Figure 1**) utilisant un laser, des lentilles, des polariseurs et un prisme de Wollaston.

On observe tout d'abord les franges avec une caméra CCD dans une direction perpendiculaire à un plan donné.

Ensuite on place l'objet à étudier sur ce plan et les franges qui y sont projetées sont déformées par le relief de l'objet. La déformation des franges permet de remonter au profil de l'objet.

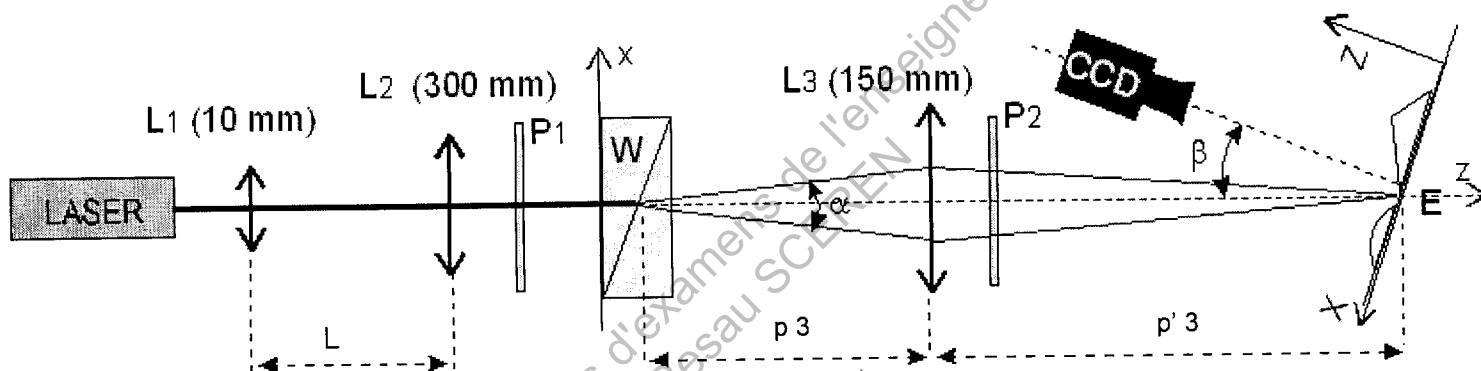


Figure 1 : Montage interférométrique.

L'étude qui suit est constituée de questions indépendantes.

### A. Élargisseur de faisceau (2,5 points)

En première approximation, on considère le faisceau sortant du laser comme cylindrique d'axe parallèle à l'axe optique de diamètre  $\phi_1 = 1,00$  mm.

On élargit le faisceau avec un système afocal formé de deux lentilles convergentes  $L_1$  et  $L_2$  de distances focales respectives  $f_1' = 10$  mm et  $f_2' = 300$  mm.

1. En utilisant les lois de l'optique géométrique et des lentilles minces, faire un schéma sans échelle du montage "élargisseur de faisceau" en précisant la position des foyers de chaque lentille.
2. Représenter sur le schéma précédent les rayons limitant le faisceau.
3. Donner la valeur numérique de la distance  $D$  séparant les lentilles.
4. Donner la valeur du grandissement  $G$  et en déduire le diamètre du faisceau  $\phi_2$  en sortie de la lentille  $L_2$ .

## B. Faisceaux gaussiens (4 points)

La répartition énergétique du faisceau laser de longueur d'onde  $\lambda$  est en réalité gaussienne (Figure 2).

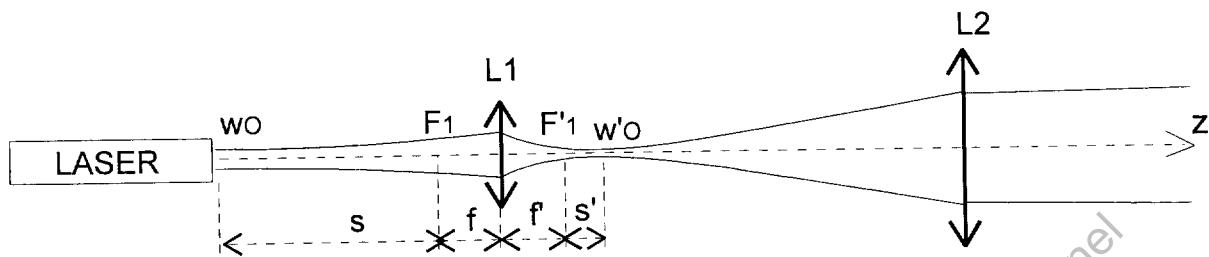


Figure 2 : Faisceaux gaussiens

Données :

- On admet que le faisceau reste cylindrique tant que la distance  $z$  d'éloignement par rapport au waist, de rayon  $w_0$ , est inférieure à la distance de Rayleigh  $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ .

- Dans un plan d'abscisse  $z$ , le rayon du faisceau est :  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$ .

- La loi de conjugaison des faisceaux gaussiens pour une lentille mince de focale  $f$  relie la distance  $s$  du waist objet au foyer objet et la distance  $s'$  du waist image au foyer image :

$$s' = \frac{sf^2}{s^2 + z_R^2} \quad \text{et} \quad w_0'^2 = w_0^2 \frac{s'}{s} \quad \text{où } w_0' \text{ est le waist image}$$

- Longueur d'onde du laser :  $\lambda = 0,633 \mu\text{m}$
- Rayon du faisceau au waist :  $w_0 = 0,50 \text{ mm}$
- Distance focale de la lentille  $L_1$  :  $f_1' = 10 \text{ mm}$
- Distance entre le waist objet et la lentille  $L_1$  :  $d = 410 \text{ mm}$

1. Calculer la valeur de distance de Rayleigh  $z_R$  dans l'espace objet de  $L_1$ .
2. En déterminant la valeur de  $s'$ , retrouver pour le waist image  $w_0'$  une valeur de  $4 \mu\text{m}$ .
3. On se place dans la situation où la distance  $z$  d'éloignement par rapport au waist devient très supérieure à la distance de Rayleigh  $z_R$ .
- 3.1. Montrer que dans ce cas, l'équation donnant le rayon du faisceau laser se simplifie en :

$$w(z) \approx w_0 \frac{z}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} z.$$

3.2. En déduire que le faisceau est conique et que l'angle total d'ouverture s'écrit :  $\theta = \frac{2\lambda}{\pi w_0}$ .

4. On se place dans l'espace entre les deux lentilles.

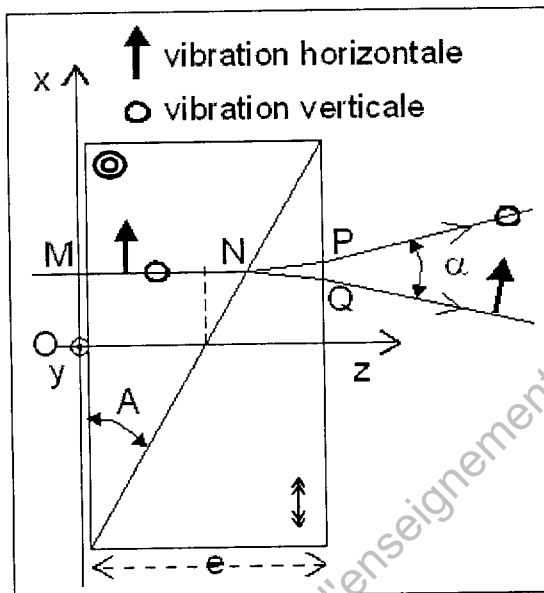
En admettant que l'approximation faite au 3. est toujours valable, calculer la valeur du rapport

$$G = \frac{w_2}{w_1} \quad \text{avec } w_1 \text{ et } w_2 \text{ les rayons respectivement pris sur } L_1 \text{ et } L_2.$$

Comparer avec le résultat de A.4.

**C. Prisme de Wollaston (4 points)**

Le faisceau laser élargi de longueur d'onde  $\lambda = 0,633 \mu\text{m}$ , traverse un polariseur  $P_1$  et éclaire un prisme de Wollaston W (**Figure 3**) constitué de deux demi-prismes biréfringents d'indices ordinaire  $n_o = 1,5426$  et extraordinaire  $n_e = 1,5517$ . Le prisme a une épaisseur  $e$ .



**Figure 3 : Prisme de Wollaston**

Les deux demi-prismes ont un angle au sommet  $A \in 2,0^\circ$ . Ils sont accolés avec des lignes neutres horizontales (Ox) et verticales (Oy) de telle sorte que la ligne ordinaire de l'un soit parallèle à la ligne extraordinaire de l'autre.

Le polariseur  $P_1$  est orienté à  $45^\circ$  des lignes neutres ; une vibration rectiligne incidente sur W possède dès l'entrée deux composantes notées  $\uparrow$  et  $\circ$ , orthogonales, de même amplitude.

On considère un rayon incident en un point M tel que  $OM = x$ . La composante de polarisation horizontale  $\uparrow$  qui est ordinaire dans le premier demi prisme puis extraordinaire dans le second. C'est l'inverse pour la composante de polarisation verticale  $\circ$ .

On obtient en sortie du prisme W deux rayons de polarisation  $\uparrow$  et  $\circ$  formant entre eux un angle  $\alpha$  de valeur numérique :  $\alpha = 0,636 \text{ mrad}$ .

1. Pour justifier la direction NQ prise par la vibration de polarisation horizontale  $\uparrow$ , compléter la construction d'Huygens du **schéma n°1** de l'**annexe à rendre avec la copie**.

2. L'angle de séparation des faisceaux est si faible qu'on supposera P et Q confondus dans le prolongement de MN. On montre alors que le chemin optique du rayon de polarisation horizontale  $\uparrow$  entre M et Q est peu différent de :  $(MQ) \approx (n_e+n_o)e/2 - (n_e - n_o).x.\tan(A)$ .

Déterminer de même le chemin optique (MP) du rayon de polarisation verticale  $\circ$ .

3. On admet que la différence de marche peut s'écrire :  $\delta = \alpha x$ . On appelle  $x_i$  l'ordonnée du point M pour laquelle la différence de marche est égale à  $\lambda$

3.1. Montrer que la différence de phase peut s'écrire  $\varphi = \frac{2\pi x}{x_i}$ .

3.2. Calculer numériquement  $x_i$  en mm.

## D. Interférences en lumière polarisée et décalage de phase (4,5 points)

Formulaire mathématique :

$$\cos a = \frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2} \qquad \cos(a+\pi/2) = -\sin(a)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} \qquad \sin(a+\pi/2) = \cos(a)$$

$$\cos(2a) = 2 \cdot \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 a$$

1. Expliquer sans calcul pourquoi un second polariseur  $P_2$  (**Figure 1**) permet l'interférence des deux faisceaux dans le plan donné.

2. On appelle  $a_0$  l'amplitude de la vibration qui émerge de  $P_1$  et  $I_0 = a_0^2$  son intensité.

Compléter le **schéma n°2 sur l'annexe à rendre avec la copie** pour montrer qu'en sortie de  $P_2$  on a deux vibrations de même amplitude  $a_0/2$  et déphasées de  $\varphi$ .

3. A la sortie de  $P_2$ , on a deux vibrations de même amplitude  $a_0/2$  et déphasées de  $\varphi$ .

3.1. Donner l'expression de l'amplitude des deux vibrations précédentes (on utilisera la forme trigonométrique ou la forme complexe).

3.2. Déterminer l'expression de l'intensité résultante de l'interférence des deux ondes.

4. Pour le rayon incident en M (d'abscisse  $x$ ), l'intensité dans le plan passant par E et perpendiculaire à Oz est donnée par :

$$I = I_{\text{MOY}} (1 + m \cos(\varphi)) \text{ avec la différence de phase } \varphi = \frac{2\pi x}{x_i}.$$

On déplace successivement le prisme de Wollaston des distances  $x_i/4$ ; puis  $x_i/2$ ; puis  $3x_i/4$  le long de l'axe Ox.

Montrer que les intensités deviennent respectivement :

$$I_1 = I_{\text{MOY}} \left( 1 + m \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$I_2 = I_{\text{MOY}} (1 + m \cos(\varphi + \pi))$$

$$I_3 = I_{\text{MOY}} \left( 1 + m \cos\left(\varphi + \frac{3\pi}{2}\right) \right)$$

5. On considère le rapport :  $T = \frac{I_3 - I_1}{I - I_2}$

Exprimer T en fonction de  $\varphi$  et simplifier cette expression.

### E. Projection des franges (3,5 points)

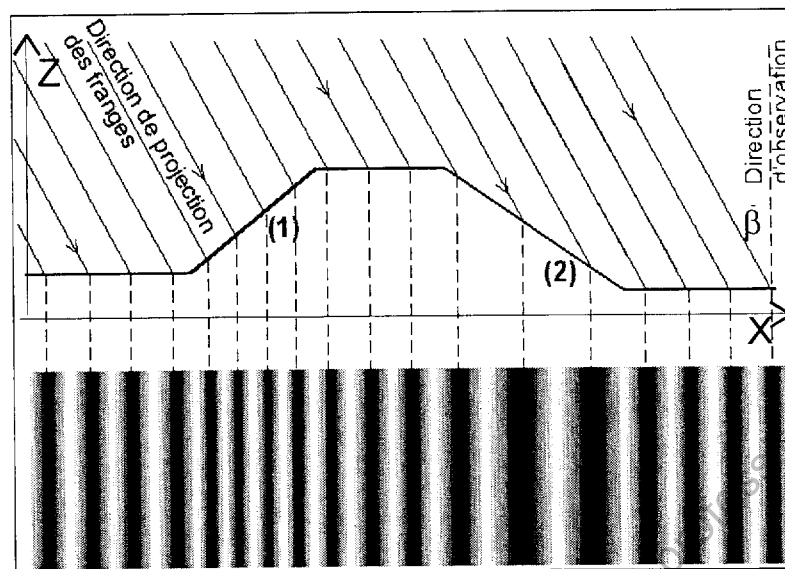


Figure 4 : Le pas se resserre pour une pente positive (1) et s'élargit pour une pente négative (2)

1. On fait l'image des franges avec une lentille  $L_3$  (Figure 1) de focale  $f_3' = 150$  mm sur un écran de référence perpendiculaire à l'axe  $Oz$ . On souhaite un grandissement transversal  $G_T = -3$ .

Calculer les grandeurs algébriques  $p_3$  et  $p_3'$ .

2. Ce grandissement permet d'obtenir des franges rectilignes de pas  $P = 3,00$  mm dans le plan perpendiculaire à l'axe  $Oz$ .

On incline l'écran de référence d'un angle  $\beta = 28^\circ$  par rapport à sa position initiale. On admet que  $G_T$  reste le même.

Calculer le pas  $P_\beta$  des franges projetées sur la surface de l'écran pour cet angle d'inclinaison  $\beta$ .

3. On fixe sur l'écran un objet.

$X$  est l'abscisse d'un point de l'écran dans le repère incliné (Figure 1).

L'altitude  $Z$  de chaque point de l'objet est comptée par rapport à l'écran. On constate que les franges précédentes apparaissent déformées. Le pas dépend maintenant de l'altitude des points (Figure 5).

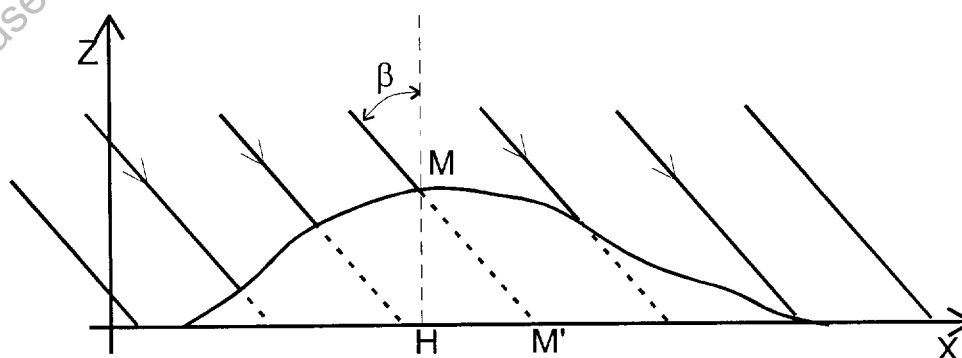


Figure 5 : Schéma de l'objet éclairé en lumière structurée

3.1. Montrer, en considérant la figure 5, que le point M sur l'objet d'abscisse X et d'altitude Z aura le même éclairement qu'un point M' sur l'écran de référence d'abscisse X'.

3.2. Calculer X' en fonction de l'altitude Z et de l'angle  $\beta$ .

## F. Images phasées et leur lien avec le profil (1,5 points)

On admet l'égalité suivante :  $\frac{2\pi x}{x_i} = \frac{2\pi X}{P_\beta}$

La caméra prend une première image de l'écran éclairé par les franges. Il n'y a pas d'objet. L'éclairement de chaque point s'exprime par :

$$I_{\text{REF}} = I_{\text{MOY}} \left( 1 + m \cos\left(\frac{2\pi X}{P_\beta}\right) \right).$$

La caméra prend ensuite une deuxième image avec l'objet éclairé par les franges :

$$I_{\text{OBJ}} = I_{\text{MOY}} \left( 1 + m \cos\left(\frac{2\pi(X + Z \tan(\beta))}{P_\beta}\right) \right)$$

On note la phase en chaque point de l'image de référence par  $\varphi_{\text{REF}} = \frac{2\pi X}{P_\beta}$

et la phase sur l'image avec l'objet par  $\varphi_{\text{OBJ}} = \frac{2\pi(X + Z \tan(\beta))}{P_\beta}$ .

1. Montrer que la différence  $\varphi_{\text{OBJ}} - \varphi_{\text{REF}}$  permet de retrouver l'altitude Z de chaque point.

2. On utilise la méthode des 4 images (par décalage de phase de  $\pi/2$ ;  $\pi$ ;  $3\pi/2$ ). On détermine  $\varphi_{\text{REF}}$  en

tout point à l'aide de l'égalité suivante :  $\varphi_{\text{REF}} = \arctan\left[\frac{I_3 - I_1}{I - I_2}\right]$

Les éclairements sont donnés en niveaux de gris :  $I = 229$  ;  $I_1 = 52$  ;  $I_2 = 24$  ;  $I_3 = 201$ .

Calculer  $\varphi_{\text{REF}}$ .



Annexe à joindre avec la copie

