SESSION 2010

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR

SPÉCIALITÉS	COEF.	DURÉE
CONTRÔLE INDUSTRIEL ET RÉGULATION AUTOMATIQUE	2	3
ÉLECTROTECHNIQUE	2	3
GÉNIE OPTIQUE	3	3
SYSTÈMES ÉLECTRONIQUES	2	3
TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE	3	3

MATHÉMATIQUES

Le sujet comprend 9 pages, numérotées de 1 à 9.
Les pages 7, 8 et 9 sont à rendre avec la copie.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 7 pages, numérotées de 1 à 7.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Code sujet
MATGRA1

Exercice 1 (10 *points*)

Dans cet exercice, on se propose d'étudier dans la partie A une perturbation d'un signal continu et, dans la partie B, la correction de cette perturbation par un filtre analogique.

Partie A

Dans cet exercice, on note τ une constante réelle appartenant à l'intervalle $[0;2\pi]$ et on considère les fonctions *f* et *g*, définies sur l'ensemble **R** des nombres réels, telles que :

- pour tout nombre réel *t*, $f(t)=1$;
- la fonction *g* est périodique de période 2π et :

$$\begin{cases} g(t)=0 \text{ si } 0\leq t<\tau \\ g(t)=1 \text{ si } \tau\leq t<2\pi \end{cases}$$

Pour tout nombre réel *t*, on pose :

$$h(t)=f(t)-g(t)$$

La fonction *h* ainsi définie représente la perturbation du signal.

1. Les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* sont tracées sur le **document réponse n°1 (figures 1 et 2)**.
Sur la **figure 3** du **document réponse n°1**, tracer la représentation graphique de la fonction *h*.

2. On admet que la fonction *h* est périodique de période 2π.
Pour tout nombre réel *t*, on définit la série de Fourier $S(t)$ associée à la fonction *h* par

$$S(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right)$$

a) Déterminer a_0.

b) Soit *n* un nombre entier supérieur ou égal à 1.
Calculer

$$\int_0^{\tau}\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

et en déduire que

$$a_n=\frac{1}{n\pi}\sin(n\tau).$$

c) Montrer que, pour tout nombre entier *n* supérieur ou égal à 1,

$$b_n=\frac{1}{n\pi}\left(1-\cos(n\tau)\right).$$

3. Soit *n* un nombre entier naturel. On associe à *n* le nombre réel A_n tel que :

- $A_0=a_0$
- $A_n=\sqrt{\dfrac{a_n^2+b_n^2}{2}}$ si *n* est un nombre entier supérieur ou égal à 1.

Montrer que, pour tout entier *n* supérieur ou égal à 1, on a : $A_n=\dfrac{1}{n\pi}\sqrt{1-\cos(n\tau)}$.

On suppose, pour toute la suite de l'exercice, que $\tau = \frac{\pi}{4}$.

4. Compléter le **tableau 1** du **document réponse n°2**, avec des valeurs approchées à 10^{-5} près.

5. La valeur efficace h_{eff} de la fonction h est telle que :

$$h_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [h(t)]^2 \, \mathrm{d}t .$$

   a) Calculer h_{eff}^2.

   b) Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près du nombre réel P défini par $P = \sum_{n=0}^{3} A_n^2$.

   c) Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près du quotient $\frac{P}{h_{eff}^2}$.

Partie B

On rappelle que j est le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

On considère la fonction de transfert H définie, pour tout nombre complexe p différent de $-\frac{3}{2}$, par :

$$H(p) = \frac{3}{2p+3}.$$

On définit la fonction r, pour tout nombre réel positif ω, par :

$$r(\omega) = |H(\mathrm{j}\omega)|.$$

Le but de cette partie est de déterminer le spectre d'amplitude du signal, noté k, obtenu en filtrant la perturbation h au moyen d'un filtre dont la fonction de transfert est H.

1. Montrer que $r(\omega) = \frac{3}{\sqrt{9+4\omega^2}}$.

2. Pour tout nombre entier naturel n, on définit le nombre réel positif B_n par :

$$B_n = r(n) \times A_n,$$

   où A_n est le nombre réel positif défini dans la question 3 de la **partie A**.

   Compléter le **tableau 2** du **document réponse n°2**, avec des valeurs approchées à 10^{-5} près.

   Le spectre d'amplitude du signal filtré k est donné par la suite des nombres réels B_n.

3. La **figure 4** sur le **document réponse n°2** donne le spectre d'amplitude de la perturbation h, c'est-à-dire une représentation graphique de la suite des nombres réels A_n.

Sur la **figure 5** du **document réponse n°2**, on a commencé de même à représenter la suite des nombres réels B_n.
Compléter cette représentation graphique à l'aide du tableau de valeurs n°2 du **document réponse n°2**.

4. Une valeur approchée à 10^{-4} près du carré de la valeur efficace du signal k est : $k_{eff}^2 \approx 0{,}0516$.

a) Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près du nombre réel Q défini par $Q = \sum_{n=0}^{3} B_n^2$.

b) Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près du quotient $\dfrac{Q}{k_{eff}^2}$.

On a étudié le spectre de Fourier d'une perturbation d'un signal. On ne peut pas négliger les raies de hautes fréquences de ce spectre. Le filtrage dissipe une part importante de l'énergie de la perturbation et les raies de hautes fréquences de la perturbation filtrée sont négligeables.

Exercice 2 (10 *points*)

On considère un système physique dont l'état est modélisé par la fonction y de la variable réelle t, solution de l'équation différentielle :

$$y''(t)+4y(t)=e(t) \qquad \textbf{(1)},$$

où la fonction e représente une contrainte extérieure au système.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que $e(t)=20$ pour tout nombre réel t.
L'équation différentielle (1) s'écrit alors sous la forme :

$$y''(t)+4y(t)=20 \qquad \textbf{(2)}.$$

1. Déterminer la fonction constante h solution particulière de l'équation différentielle **(2)**.

2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle **(2)**.

3. En déduire l'expression de la fonction f solution de l'équation différentielle **(2)** qui vérifie les conditions $f(0)=0$ et $f'(0)=0$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie un moyen d'amener le système vers un état d'équilibre de manière « lisse ».
À cette fin, on soumet le système à une contrainte extérieure modélisée par la fonction e définie par :

$$e(t)=8tU(t)-8(t-\tau)U(t-\tau),$$

où τ désigne un nombre réel strictement positif.

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\begin{cases} U(t)=0 & \text{si } t<0 \\ U(t)=1 & \text{si } t\geq 0 \end{cases}.$$

Une fonction définie sur $\mathbf{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

On appelle g la fonction causale telle que :

$$g''(t)+4g(t)=e(t)$$

et vérifiant :

$$g(0)=0 \text{ et } g'(0)=0.$$

On note $G(p)$ la transformée de Laplace de la fonction g et $E(p)$ la transformée de Laplace de la fonction e.

1. Exprimer $E(p)$ en fonction de p et de τ.

2. En déduire que :

$$G(p)=\frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}\left(1-\mathrm{e}^{-\tau p}\right).$$

3. Déterminer les constantes réelles A et B telles que :

$$\frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p^2+4}.$$

4. Déterminer alors l'original de $\dfrac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}$.

5. En déduire que, pour tout nombre réel t :

$$g(t)=g_0(t)-g_0(t-\tau) \qquad \text{avec } g_0(t)=\left(2t-\sin(2t)\right)U(t).$$

6. Montrer que pour $t\geq\tau$, on a :

$$g(t)=2\tau-\sin(2t)+\sin(2t-2\tau).$$

7. On suppose maintenant que $\tau=\pi$.

a) Simplifier l'expression de $g(t)$ pour $t\geq\tau$.

b) La courbe représentative de la fonction e, pour $\tau=\pi$, est tracée sur la figure du **document réponse n°3**.

Sur le même graphique, tracer la courbe représentative de la fonction g.

Document réponse n°1, à rendre avec la copie (exercice 1)

Figure 1 : courbe représentative de la fonction *f*

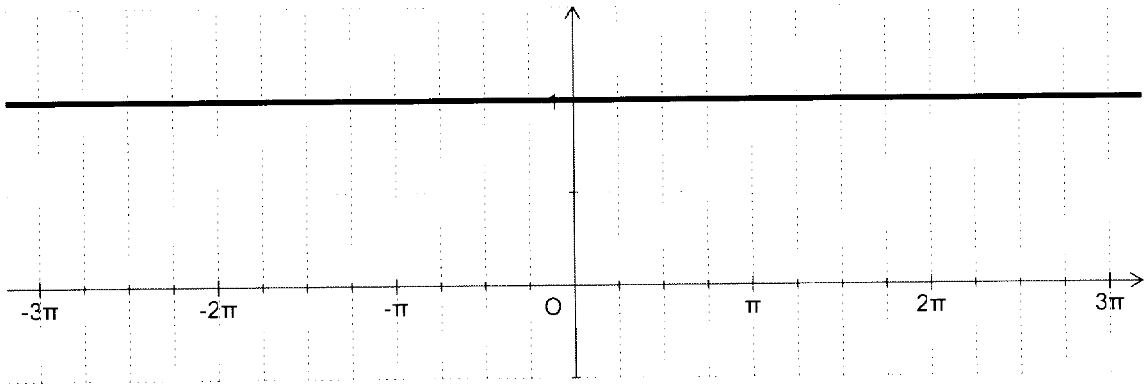


Figure 2 : courbe représentative de la fonction *g*

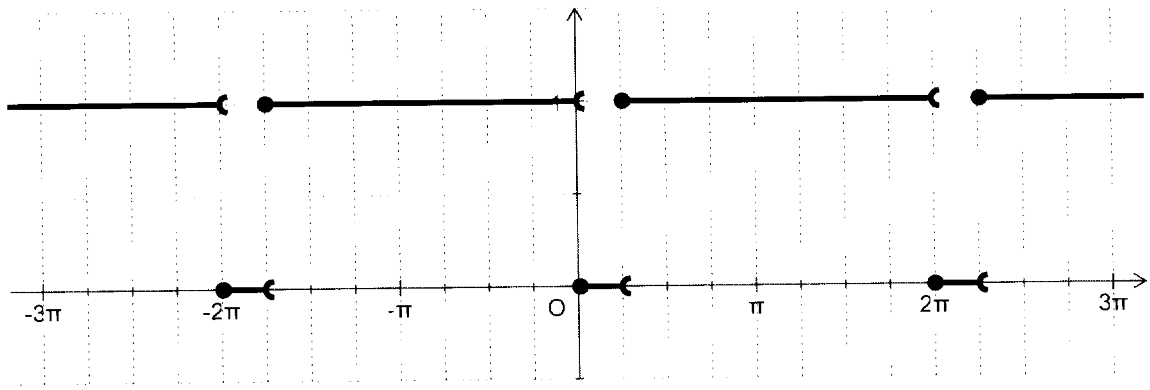
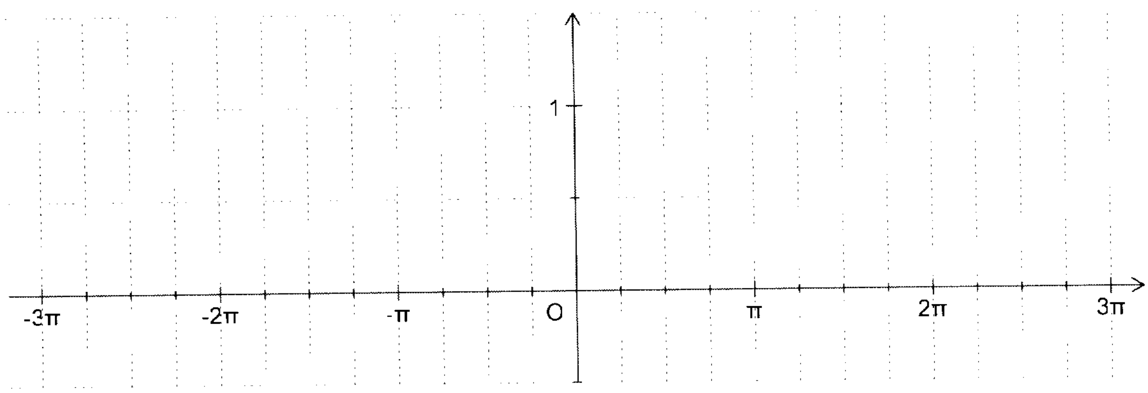


Figure 3 : courbe représentative de la fonction *h*



Document réponse n°2, à rendre avec la copie (exercice 1)

Tableau 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7
A_n	0,12500	0,17227		0,13863		0,08318	0,05305	0,02461

n	8	9	10	11	12	13	14	15
A_n		0,01914	0,03183	0,03781		0,03199	0,02274	0,01148

Tableau 2

n	0	1	2	3	4	5	6	7
B_n		0,14334		0,06200	0,03952	0,02390	0,01287	0,00516

n	8	9	10	11	12	13	14	15
B_n	0,00000	0,00315	0,00472	0,00511		0,00367	0,00242	0,00114

Figure 4

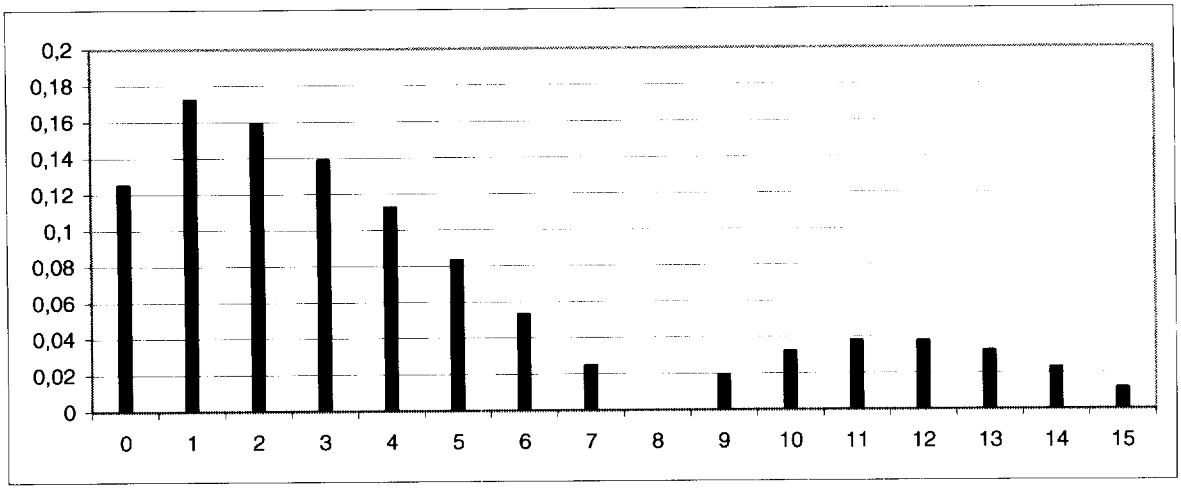
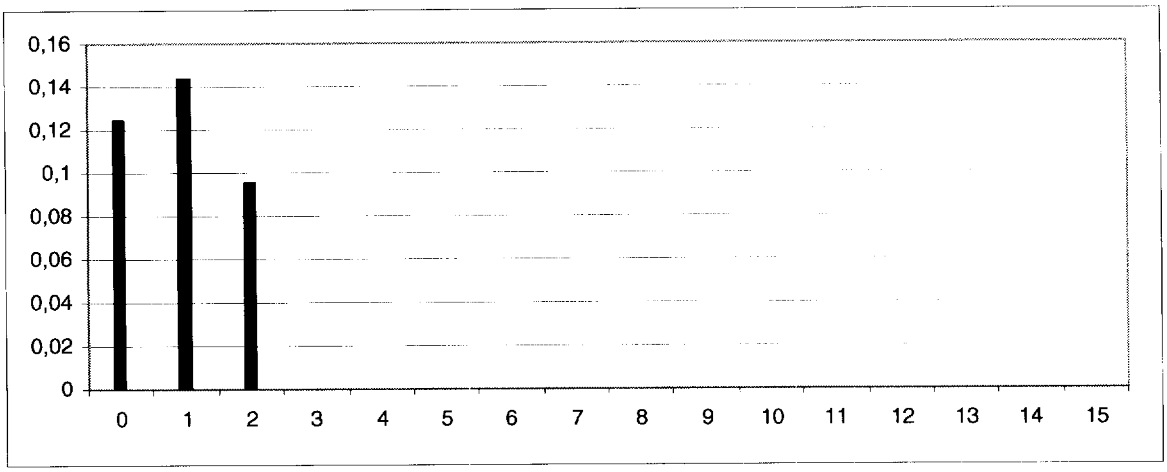
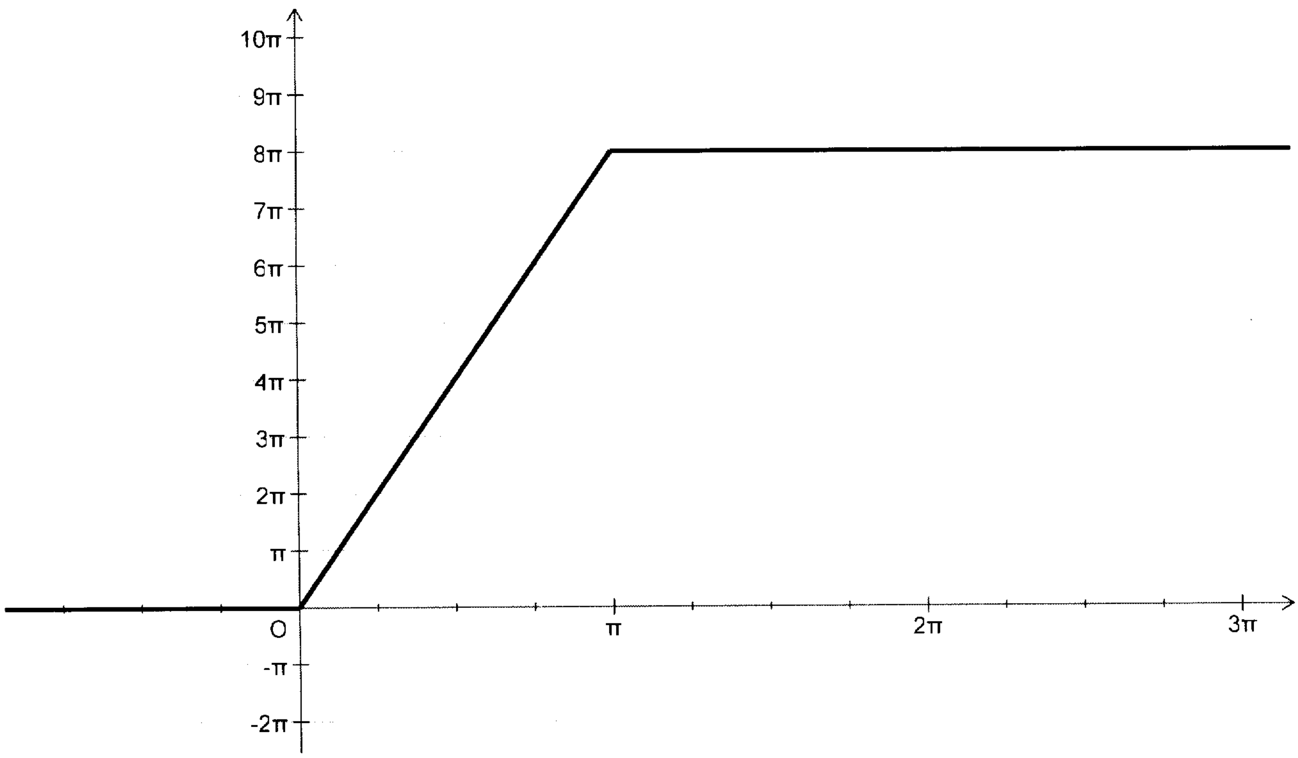


Figure 5



Document réponse n°3, à rendre avec la copie (exercice 2)



FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

GROUPEMENT A

CONTROLE INDUSTRIEL ET REGULATION AUTOMATIQUE

ELECTROTECHNIQUE

GENIE OPTIQUE

INFORMATIQUE ET RESEAUX POUR L'INDUSTRIE ET LES SERVICES TECHNIQUES

SYSTEMES ELECTRONIQUES

TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) **Limites usuelles**

Comportement à l'infini

$\lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\text{Arc}\sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\text{Arc}\tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at} \quad (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\,\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\,\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\,\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ …….. où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ ……… où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ar^2 + br + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
de discriminant Δ	

3. *SERIES DE FOURIER*

f : fonction périodique de période T ;

développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}\ , \quad (n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t \ ; \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \ ; \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t\,.$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\,\mathrm{d}t \ \ (k \in \mathbb{Z})\ ; \qquad c_0 = a_0\ ; \qquad \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2} = c_n\ ; \qquad \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2} = c_{-n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

4. *TRANSFORMATION DE LAPLACE*

Fonctions usuelles

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p} \ ; \qquad \mathcal{L}(t\,\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p^2} \ ; \qquad \mathcal{L}\left(t^n \mathcal{U}(t)\right) = \frac{n!}{p^{n+1}} \ \ (n \in \mathbb{N}) \ ;$$

$$\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)\right) = \frac{1}{p+a} \ ; \quad \mathcal{L}(\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \ ; \qquad \mathcal{L}(\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)) = \frac{p}{p^2+\omega^2}\,.$$

Propriétés

$$f(t)\ \mathcal{U}(t) \ \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \ F(p)$$

$f(\alpha t)\,\mathcal{U}(t) \qquad \alpha > 0$	$\dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)$
$f(t-\tau)\,\mathcal{U}(t-\tau)$	$F(p)\,\mathrm{e}^{-\tau p}$
$f(t)\,e^{-at}\,\mathcal{U}(t)$	$F(p+a)$
$f'(t)\mathcal{U}(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f''(t)\mathcal{U}(t)$	$p^2F(p) - p\,f(0^+) - f'(0^+)$
$-t\,f(t)\,\mathcal{U}(t)$	$F'(p)$
$\int_0^t f(u)\,\mathcal{U}(u)\,\mathrm{d}u$	$\dfrac{F(p)}{p}$

5. TRANSFORMATION EN Z

Signal causal $n \mapsto x(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$	**Transformée en Z** $z \mapsto (Zx)(z)$
$e(n) = 1$	$(Ze)(z) = \dfrac{z}{z-1}$
$\begin{cases} d(0) = 1 \\ d(n) = 0 \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$	$(Zd)(z) = 1$
$r(n) = n$	$(Zr)(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$
$c(n) = n^2$	$(Zc)(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$f(n) = a^n,\ a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$(Zf)(z) = \dfrac{z}{z-a}$
$y(n) = a^n x(n),\ a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$(Zy)(z) = (Zx)\left(\dfrac{z}{a}\right)$
$y(n) = x(n-n_0),\ (n-n_0) \in \mathbb{N}$ ou $y(n) = x(n-n_0)e(n-n_0)$	$(Zy)(z) = z^{-n_0}(Zx)(z)$
$y(n) = x(n+1)$	$(Zy)(z) = z[(Zx)(z) - x(0)]$
$y(n) = x(n+2)$	$(Zy)(z) = z^2\left[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1}\right]$
$y(n) = x(n+n_0),\ n_0 \in \mathbb{N}^*$	$(Zy)(z) = z^{n_0}\left[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2} \cdots - x(n_0-1)z^{-(n_0-1)}\right]$

6. ***PROBABILITES***

a) **Loi binomiale** $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X)=np$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

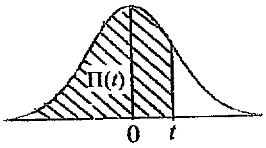
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) **Loi normale**

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$