SESSION 2010

BREVET DE TECHNICIEN

COLLABORATEUR D'ARCHITECTE

MATHEMATIQUES

Durée : *3 heures*

Coefficient : *5*

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le formulaire de mathématiques est joint au sujet.

IMPORTANT : *Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4 + la page de présentation.*
Assurez-vous qu'il est complet ; s'il est incomplet,
veuillez le signaler au surveillant de la salle qui vous en donnera un autre exemplaire.

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

NOTATION : une réponse exacte rapporte 1 point ; l'absence de réponse ou une réponse fausse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.

1) f est la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3x + 2 + \frac{1}{x}$.

   La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan admet pour asymptote la droite d'équation :

   A: $y = 2$; B: $y = 3x + 2$; C : $y = -3x - 2$.

2) Le nombre $x = \ln\left(\frac{e}{4}\right) - \ln 2 + 3\ln(2e)$ est égal à :

   A: 4 ; B: 1 ; C : $4\ln 2$.

3) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x-1) < 0$ est :

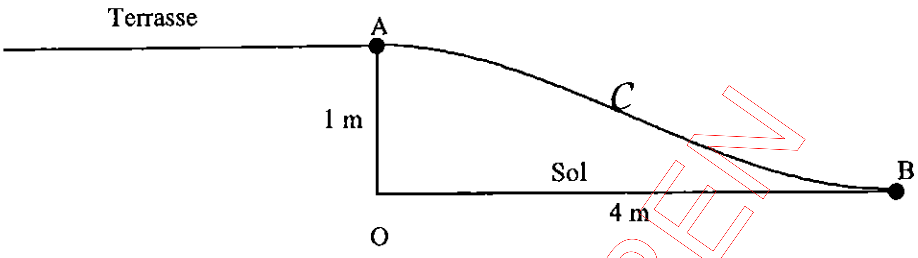
   A: $]-\infty\,;1[$; B: $]1\,;2[$; C : $[2\,;+\infty[$.

4) Une solution particulière de l'équation différentielle $2y' = y$ est la fonction définie par :

   A: $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$; B: $f(x) = e^{2x}$; C : $f(x) = e^{-2x}$.

Exercice 2 (6 points)

On doit créer une rampe d'accès reliant une terrasse au sol pour permettre l'accès aux handicapés munis de fauteuils roulants. Une solution consiste à relier le point A au point B par la courbe $\mathcal{C}$ qui fait l'objet de l'exercice suivant.



On considère un repère orthonormal d'origine O, dans lequel A(0 ; 1) et B(4 ; 0).
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 4] par :

$$f(x)=\frac{1}{32}\left(x^3-6x^2+32\right)$$

1) Vérifier que les points A et B sont sur la courbe $\mathcal{C}$.

2) Vérifier que $f'(x)=\dfrac{3x(x-4)}{32}$.

3) Etudier les variations de f sur [0 ; 4].

4) L'accessibilité pour les fauteuils roulants est bonne s'il y a des tangentes horizontales en A et B. Est-ce le cas ici ? Justifier.

5) On veut déterminer le volume de béton nécessaire pour réaliser cette rampe d'accès. On note S la partie située entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=0$.
Une unité d'aire sur le graphique correspond à 1m² en réalité.
   a) Calculer l'aire de S (en m²).
   b) Sachant que la rampe d'accès a une largeur de 2 m, quel prix va coûter le béton de la rampe (le béton vaut 60 euros par mètre cube).

Problème **(10 points)**

La courbe C, donnée en ANNEXE, est la représentation graphique dans un repère orthonormal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.
Les points A $(0{,}5\ ;\ 2e^{-0{,}5})$ et B $(0\ ;\ 1)$ appartiennent à cette courbe.
La tangente à la courbe en A est parallèle à l'axe des abscisses.

PARTIE A : lecture graphique

Par lecture graphique et en utilisant les données de l'énoncé, répondre aux questions suivantes sans justifier.

1) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[-0{,}5\ ;\ 2]$.

2) Déterminer $f(0)$ et $f'(0{,}5)$.

PARTIE B : étude de la fonction

En fait, la fonction f représentée dans l'ANNEXE est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$.

1) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

2) a) Justifier que pour tout réel x, $f(x) = 2\dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}$.

b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. (On donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$.)

c) En déduire l'existence d'une asymptote et donner son équation.

3) a) Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = (1-2x)e^{-x}$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f.

4) a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point B d'abscisse 0.

b) Tracer sur le graphique la tangente T.

5) a) Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x-3)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

b) Hachurer sur le graphique le domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

c) Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine haché. Donner la valeur arrondie au millième.

ANNEXE (à rendre avec la copie)