SCÉRÉN
SERVICES CULTURE ÉDITIONS RESSOURCES POUR L'ÉDUCATION NATIONALE

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

SESSION 2011

***

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul et du formulaire de mathématiques est autorisé.

Une feuille de papier millimétré est fournie.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comprend 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions, une seule réponse A, B, C est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
On ne demande aucune justification.
Notation :
Chaque réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1° $(O\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,,\ \vec{k})$ est un repère orthonormal direct de l'espace. On considère les vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est :	-1	5	$\vec{v}$

2° Avec les mêmes données qu'au 1°,

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La norme du produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est :	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	4

3° On donne les matrices M et N : $M=\begin{pmatrix}13 & -8 & -12\\12 & -7 & -12\\6 & -4 & -5\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}6 & -4 & -6\\6 & -3 & -6\\3 & -2 & -2\end{pmatrix}$.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
$M-2N$ est égale à :	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

4° Avec les mêmes données qu'au 3°,

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit $M\times M=M^2$ est :	$\begin{pmatrix}377 & 356 & 170\\356 & 337 & 160\\170 & 160 & 77\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}169 & 64 & 144\\144 & 49 & 144\\36 & 16 & 25\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

EXERCICE 2 (6 points)

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y''-2y'+y=1-\sin x$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur **R**, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions définies sur **R** de l'équation différentielle (E_0) :

$$y''-2y'+y=0.$$

2° Déterminer la constante réelle k telle que la fonction g définie sur **R** par $g(x) = k\cos x + 1$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

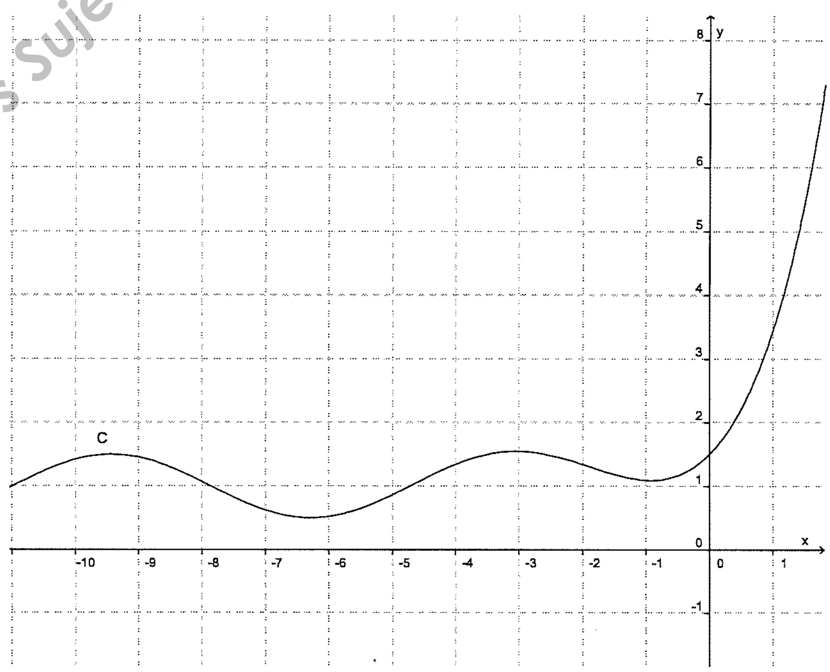
3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0)=\dfrac{3}{2}$ et $f'(0)=1$.

B. Étude locale d'une fonction

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x)=1+e^{x}-\dfrac{1}{2}\cos x$.

On a tracé ci-dessous sa courbe représentative C dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.



1° a) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos x$

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est $f(x) = \frac{3}{2} + x + \frac{3}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2° a) Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b) Étudier les positions relatives de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

EXERCICE 3 (10 points)

***Les trois parties A, B* et *C* peuvent être traitées de façon indépendante.**

On considère les nombres réels $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$ et $t_4 = 4$. *On se propose de construire une courbe B-spline de degré 2 de vecteur nœud* $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$.

A. Détermination des fonctions polynômes B-splines

On rappelle que les fonctions polynômes B-splines de degré m associées au vecteur nœud $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$ sont définies sur **R** et pour $m \neq 0$, par :

$$N_{i,m}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+m} - t_i} N_{i,m-1}(t) + \frac{t_{i+m+1} - t}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(t).$$

1° On a déterminé des fonctions polynômes B-splines de degré 0 et 1 associées au vecteur nœud (0, 1, 2, 3, 4) qui ont été rassemblées dans les tableaux ci-dessous.

t	0	1	2	3	4	
$N_{0,0}(t)$	0	1	0	0	0	0
$N_{1,0}(t)$	0	0	1	0	0	0
$N_{2,0}(t)$	0	0	0	1	0	0
$N_{3,0}(t)$	0	0	0	0	1	0

t	0	1	2	3	4	
$N_{0,1}(t)$	0	t	$2-t$	0	0	0
$N_{1,1}(t)$	0	0		$3-t$	0	0
$N_{2,1}(t)$	0	0	0	$t-2$	$4-t$	0

Déterminer $N_{1,1}(t)$ pour tout t de l'intervalle [1, 2].

2° Le tableau suivant donne les fonctions polynômes B-splines de degré 2 associées au vecteur nœud (0, 1, 2, 3, 4) :

t	0	1	2	3	4	
$N_{0,2}(t)$	0	$\frac{1}{2}t^2$	$-t^2 + 3t - \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}t^2 - 3t + \frac{9}{2}$	0	0
$N_{1,2}(t)$	0	0	$\frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}t^2 - 4t + 8$	0

Démontrer que, pour tout t de l'intervalle [2, 3], $N_{1,2}(t) = -t^2 + 5t - \frac{11}{2}$.

B. Détermination des équations paramétriques d'un des arcs de la courbe B-spline

Dans le plan muni du repère orthonormal $(O\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$ d'unité 8 centimètres, on considère les points $P_0\,(0, 1)$ et $P_1\,(2, 1)$.

La courbe B-spline associée aux points P_0 et P_1, au vecteur nœud $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$ et aux polynômes B-splines de degré 2 est définie par $\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^{i=1} N_{i,2}(t)\ \overrightarrow{OP_i}$.

Démontrer que, pour tout t de l'intervalle [1, 2], le point $M(t)$ a pour coordonnées $x(t) = t^2 - 2\,t + 1$ et $y\,(t) = -\dfrac{1}{2}\,t^2 + 2\,t - 1$.

Dans ce qui suit, **on admet** que, pour tout t de l'intervalle [2, 3], le point $M(t)$ a pour coordonnées $x(t) = -\,2\,t^2 + 10\,t - 11$ et $y\,(t) = -\dfrac{1}{2}\,t^2 + 2\,t - 1$.

C. Construction de la courbe B-spline

On considère l'arc C_1, ensemble des points $M(t)$ de coordonnées

$$\begin{cases} x(t) = f_1(t) = t^2 - 2t + 1 \\ y(t) = g_1(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + 2t - 1 \end{cases}$$ où t appartient à l'intervalle [1, 2].

1° a) Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur [1, 2] et rassembler les résultats dans un tableau unique.

b) Préciser des vecteurs directeurs des tangentes à C_1 aux points $M(t)$ de paramètres 1 et 2.

2° On considère l'arc C_2, ensemble des points $M(t)$ de coordonnées

$$\begin{cases} x(t) = f_2(t) = -2t^2 + 10t - 11 \\ y(t) = g_2(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + 2t - 1 \end{cases}$$ où t appartient à l'intervalle $[2, 3]$.

On admet que le tableau des variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 sur $[2;3]$ est le suivant :

t	2		$\frac{5}{2}$		3
$f'_2(t)$	2	$+$	0	$-$	-2
$f_2(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1
$g'_2(t)$	0		$-$		-1
$g_2(t)$	1	$\searrow$	$\frac{7}{8}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

Déterminer (par lecture du tableau ou par calcul) des vecteurs directeurs des tangentes à C_2 aux points $M(t)$ de paramètres 2, $\frac{5}{2}$ et 3.

3° On rappelle que le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité graphique est 8 centimètres.

a) Construire les tangentes à la courbe C_1 aux points $M(1)$ et $M(2)$.

b) Construire les tangentes à la courbe C_2 aux points $M(2)$, $M\left(\frac{5}{2}\right)$ et $M(3)$.

c) On désigne par A le point de coordonnées $A(0, \frac{1}{2})$.

On admet que pour t appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, l'arc C_0 de la courbe B-spline cherchée est le segment $[OA]$.
Construire sur le même graphique les arcs de courbe C_0, C_1, C_2.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\text{Arc}\sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\text{Arc}\tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(k u)' = k u'$

$(uv)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.