SESSION 2011

BREVET TECHNICIEN SUPÉRIEUR

CHIMISTE

Mathématiques

Durée : 2 heures
Coefficient : 3

Matériel autorisé :
Calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante et sans dispositif de communication externe (circulaire n° 99-186 du 16/11/99).

Aucun document autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5 et le formulaire de mathématiques numéroté 1 à 4 (agrafé avec le sujet).

Document à rendre avec la copie : annexe page 5

Exercice 1 (11 points)

On considère deux réactions chimiques opposées, toutes deux d'ordre 1.

$A \to B$ est une réaction réversible, de constante de vitesse k_1, et $B \to A$ est la réaction opposée, de constante de vitesse k_2. On désigne par $x(t)$ et $y(t)$ les concentrations respectives (exprimées en moles par litre) des produits A et B à l'instant t (positif et exprimé en secondes) et l'on admettra que les fonctions x et y sont définies et deux fois dérivables sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$. Seul le produit A étant présent à l'instant initial, on pose $x(0) = x_0$, avec $x_0 > 0$ et l'on a donc $y(0) = 0$.

Les lois de la cinétique chimique permettent d'obtenir le système différentiel (S) suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} x'(t) = -k_1 x(t) + k_2 y(t) & (1) \\ y'(t) = k_1 x(t) - k_2 y(t) & (2) \end{cases} \quad \text{avec } t \geq 0\,,\ k_1 > 0 \text{ et } k_2 > 0.$$

Partie A : résolution du système différentiel

1) Calculer $x'(t) + y'(t)$ puis justifier que la fonction $x + y$ est une fonction constante ; déterminer cette constante puis en déduire l'expression de $y(t)$ en fonction de $x(t)$.
2) A l'aide de l'équation (1) prouver que : $x'(t) + (k_1 + k_2)x(t) = k_2 x_0$.
3) On considère les équations différentielles :
   (E) : $u' + (k_1 + k_2)u = k_2 x_0$ et (E_0) : $u' + (k_1 + k_2)u = 0$,
   dans lesquelles u désigne une fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

   a) Résoudre l'équation (E_0).
   b) Déterminer une fonction constante solution de l'équation (E).
   c) Résoudre alors l'équation (E).

4) En déduire, en utilisant la condition initiale et les questions précédentes, que l'on a :

$$x(t) = x_0\left(\frac{k_2}{k_1 + k_2} + \frac{k_1}{k_1 + k_2}\mathrm{e}^{-(k_1 + k_2)t}\right) \text{ et } y(t) = x_0\left(\frac{k_1}{k_1 + k_2} - \frac{k_1}{k_1 + k_2}\mathrm{e}^{-(k_1 + k_2)t}\right).$$

Partie B : application

Dans cette partie on suppose $x_0 = 1$, $k_1 = \dfrac{1}{30}$ et $k_2 = \dfrac{1}{60}$; les courbes représentatives des fonctions x et y sont données en **Annexe.**

1) Déterminer le sens de variation des fonctions x et y.
2) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$.
3) Déterminer l'instant t_1 auquel les concentrations des produits A et B sont égales et en donner une valeur approchée à $0{,}01$ près.

Exercice 2 (9 points)

Le béton est un matériau composite qui, après hydratation, acquiert progressivement sa résistance. La réaction chimique (appelée "*prise*") qui procure cette résistance étant assez lente, les tests de résistance d'un béton sont effectués bien avant l'obtention de la résistance maximale et généralement quatre semaines après le début de la réaction. Cette résistance se mesure en *MPa* (méga Pascal).

1) A quatre semaines, cette résistance est soumise au sein d'un même ouvrage à des fluctuations : quantité d'eau apportée lors de l'hydratation, conditions climatiques, dispersion de fabrication, etc. Dans cette question on note R la variable aléatoire qui à chaque parcelle de béton de l'ouvrage choisie au hasard associe la résistance du béton mesurée en *MPa*. On suppose que R suit la loi normale de moyenne 81,5 et d'écart-type 4,5. On donnera les résultats à 0,01près.

   a) Calculer la probabilité qu'une parcelle prélevée au hasard ait une résistance inférieure ou égale à 90 *MPa.*

   b) Calculer la probabilité qu'une parcelle prélevée au hasard ait une résistance supérieure ou égale à 76 *MPa.*

   c) Calculer $P(77 \leq R \leq 86)$. Interpréter ce résultat.

2) Les normes de résistance sont établies par coulage de béton à l'intérieur d'éprouvettes de test pouvant être, selon les pays, de forme cubique ou cylindrique. On constate que la résistance y d'un même béton, mesurée sur une éprouvette cubique est plus élevée que sa résistance x mesurée sur une éprouvette cylindrique. Par exemple la norme 30/37 fait référence à une résistance de 30 *MPa* sur cylindrique et de 37 *MPa* sur cubique. Le tableau suivant donne en correspondance les résistances mesurées pour divers types de béton :

Valeurs de x(éprouvette cylindrique)	20	30	40	50	60	70	80
Valeurs de y(éprouvette cubique)	25	37	50	60	75	85	95

   a) Donner à 0,001 près le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double (x,y) et expliquer pourquoi un ajustement affine semble justifié dans ce cas.

   b) Déterminer une équation de la forme $y = ax + b$ de la droite de régression D de y par rapport à x ; on donnera les valeurs de a et b à 0,01 près.

   c) On conçoit un béton ayant une résistance de 120 *MPa* sur éprouvette cubique ; quelle est la norme que l'on peut prévoir indiquée pour celui-ci ?

3) Une société commercialise des lots de blocs de béton dont elle affirme que la résistance moyenne *m* est strictement supérieure à 60 *MPa*. Afin de mettre à l'épreuve cette affirmation, on décide d'utiliser un test d'hypothèse unilatéral au risque de 1%. On admet que la variable aléatoire X qui à tout bloc choisi au hasard dans un lot associe sa résistance suit une loi normale de moyenne *m* inconnue et d'écart-type $\sigma = 3$. On désigne par $\overline{X}$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon aléatoire et non exhaustif de taille 36 de blocs associe la moyenne des résistances des blocs de cet échantillon.

a. L'hypothèse nulle est $H_0 : m = 60$. Quelle est l'hypothèse alternative H_1?

b. On se place sous l'hypothèse H_0 . Quelle est la loi suivie par $\overline{X}$?

c. Sous l'hypothèse H_0, déterminer un réel u approché à 0,01 près tel que
$P(\overline{X} \leq 60 + u) = 0,99$

d. Énoncer la règle de décision du test.

e. Le tableau ci-dessous donne la répartition des résistances d'un échantillon aléatoire et non exhaustif de 36 blocs :

Résistance mesurée	57	58	59	60	62	64	65
Effectif	1	2	4	9	10	6	4

Appliquer le test et conclure.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS CHIMISTE

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\operatorname{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\operatorname{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$\left(e^u\right)' = e^u u'$$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ …….. où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ ……… où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ar^2 + br + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines
de discriminant Δ	complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

3. *PROBABILITES*

a) **Loi binomiale** $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X)=np$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) **Loi exponentielle**

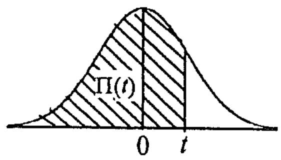
Fonction de fiabilité : $R(t)=e^{-\lambda t}$ $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t)=P(T\le t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$