CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

SESSION 2011 BREVET TECHNICIEN SUPERIEUR CHIMISTE
Eléments de correction – Épreuve de Mathématiques

31

EXERCICE 1 (11 points)

Eléments de réponses		
Partie A: résolution du système différentiel		
A 1)	$x'(t) + y'(t) = 0$ donc $x + y$ est une constante. On a $x(0) = x_0$ et $y(0) = 0$ d'où pout tout $t \geq 0$, $x(t) + y(t) = x(0) + y(0) = x_0$ et $y(t) = -x(t) + x_0$	
A 2)	En remplaçant $y(t)$ par $-x(t) + x_0$ dans l'équation (1), on obtient $x'(t) = -k_1\, x(t) + k_2(-x(t) + x_0)$ soit $x'(t) + (k_1 + k_2)\, x(t) = k_2\, x_0$	
A 3) a)	Les solutions de (E_0) sont définies sur $[0; +\infty[$ par $u(t) = C\, e^{-(k_1+k_2)t}$ où C est une constante réelle quelconque .	
A 3) b)	f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{k_2}{k_1+k_2} x_0$ est une fonction constante solution de (E)	
A 3) c)	Les solutions de (E) sont définies sur $[0; +\infty[$ par $u(t) = C\, e^{-(k_1+k_2)t} + \dfrac{k_2}{k_1+k_2} x_0$ où C est une constante réelle quelconque	
A 4)	x est une solution de (E) , avec pour condition initiale $x(0) = x_0$. Calcul de la constante C: pour $t = 0$, on a $x(0) = C + \dfrac{k_2}{k_1+k_2} x_0$ soit $x_0 = C + \dfrac{k_2}{k_1+k_2} x_0$ d'où $C = x_0 - \dfrac{k_2}{k_1+k_2} x_0 = \dfrac{k_1}{k_1+k_2} x_0$. Pour $t \geq 0$ on a donc $x(t) = x_0\left(\dfrac{k_2}{k_1+k_2} + \dfrac{k_1}{k_1+k_2} e^{-(k_1+k_2)t}\right)$ et en remplaçant dans l'équation obtenue au A1) on obtient $y(t) = -x_0\left(\dfrac{k_2}{k_1+k_2} + \dfrac{k_1}{k_1+k_2} e^{-(k_1+k_2)t}\right) + x_0$ $= x_0\left(\dfrac{k_1}{k_1+k_2} - \dfrac{k_1}{k_1+k_2} e^{-(k_1+k_2)t}\right)$	

Partie B: application . *Dans cette partie, toute démarche correcte est acceptée; dans les cas de démarches analytiques non engagées ou non abouties, une bonne exploitation des courbes représentatives données en annexe est à valoriser.*		
B 1)	Pour $t \geq 0$, $x'(t) = -k_1 x_0 e^{-(k_1+k_2)t} < 0$ donc x est décroissante sur $]0; +\infty[$. on a $y'(t) = -x'(t)$ d'après A1) donc y est croissante sur $]0; +\infty[$	
B 2)	Pour $x_0 = 1$, $k_1 = \frac{1}{3}$, $k_2 = \frac{1}{60}$, $x(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{20}t}$ et $y(t) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{20}t}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{20}t} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} x(t) = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} y(t) = \frac{2}{3}$	
B 3)	On a à résoudre $x(t) = y(t) \Leftrightarrow \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{20}t} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{20}t} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{20} t = -\ln 4 \Leftrightarrow t = 40 \ln 2$ $t_1 = 40 \ln 2$ s et une valeur approchée de t_1 à 0,01 près est 27,73 s	

EXERCICE 2 (9 points)

	Eléments de réponses	
	Question 1)	
1) a)	On a à calculer $P(R \leq 90)$. On pose $T = \frac{R - 81{,}5}{4{,}5}$; T suit la loi normale centrée réduite d'où $P(R \leq 90) = P\left(\frac{R-81{,}5}{4{,}5} \leq \frac{8{,}5}{4{,}5}\right) = P\left(T \leq \frac{17}{9}\right) = \Pi\left(\frac{17}{9}\right) \approx 0{,}97$. La probabilité qu'une parcelle prélevée au hasard ait une résistance inférieure ou égale à 90 *MPa* est 0,97	
1) b)	On a à calculer $P(R \geq 76)$. $P(R \geq 76) = P\left(\frac{R-81{,}5}{4{,}5} \geq -\frac{5{,}5}{4{,}5}\right) = P\left(T \geq -\frac{11}{9}\right) = P\left(T \leq \frac{11}{9}\right) = \Pi\left(\frac{11}{9}\right) \approx 0{,}89$. La probabilité qu'une parcelle prélevée au hasard ait une résistance supétieure ou égale à 76 *MPa* est 0,89	
1) c)	$P(77 \leq R \leq 86) = P(-1 \leq T \leq 1) = 2\,\Pi(1) - 1 \approx 0{,}68$. La probabilité qu'une parcelle prélevée au hasard ait une résistance comprise entre 77 *MPA* et 86 *MPA*	

	est 0,68.	
	Question 2)	
2) a)	$r \approx 0{,}999$. $\lvert r \rvert$ est proche de 1 donc un ajustement affine par la méthode des moindres carrés est justifié	
2) b)	équation: $y = 1{,}18\,x + 1{,}89$	
2) c)	On a à résoudre l'équation $120 = 1{,}18\,x + 1{,}89$. On obtient $x \approx 100$ ce qui donnera la norme 100/120	
	Question 3)	
3) a)	L'hypothèse alternative est H_1 : $m > 60$	
3) b)	$\overline{X}$ suit la loi normale $N\left(m\,;\frac{\sigma}{\sqrt{36}}\right)$; sous l'hypothèse H_0 , $\overline{X}$ suit la loi $N\left(60;\frac{1}{2}\right)$	
3) c)	On pose $\overline{T} = \frac{\overline{X} - 60}{0{,}5}$, $\overline{T}$ suit la loi normale centrée réduite On a : $P(\overline{X} \leq 60 + u) = 0{,}99 \Leftrightarrow P\left(\frac{\overline{X} - 60}{0{,}5} \leq \frac{u}{0{,}5}\right) = 0{,}99 \Leftrightarrow P(\overline{T} \leq 2u) = 0{,}99 \Leftrightarrow \Pi(2u) = 0{,}99$. Par lecture inverse dans la table de la loi centrée réduite, on obtient: $u = \frac{2{,}33}{2} \approx 1{,}17$ On considère donc que $P(\overline{X} \leq 61{,}17) = 0{,}99$	
3) d)	règle de décision du test: On prélève au hasard un échantillon non exhaustif de 36 blocs et on mesure la moyenne de leurs résistances; si cette moyenne est inférieure ou égale à 61,17 on accepte H_0; si cette résistance est strictement supérieure à 61,17 on rejette H_0 .	
3) e)	La moyenne de cette série statistique est environ 61,47; on rejette donc H_0 et on valide H_1; au risque de 1% on considère donc que l'on a $m > 60$.	