BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

AGENCEMENT DE L'ENVIRONNEMENT ARCHITECTURAL

Session 2011

U31 - MATHÉMATIQUES

Durée : 2 h - Coefficient 2

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet est composé de 3 pages numérotées de 1/9 à 3/9.
Deux annexes graphiques et graduées sont fournies et à rendre, numérotées 4/9 et 5/9
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 4 pages, numérotées de 6/9 à 9/9.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Les deux exercices sont indépendants

Exercice 1: (10 points)

Nous allons étudier l'évolution de la concentration dans le sang d'un médicament ingéré par une personne pour la première fois. Soit t le temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion du produit. Cette concentration en grammes par litre de sang est une fonction f de la variable t définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et est solution de l'équation différentielle : $(E): y'(t)+y(t)=ae^{-t}$, avec la condition initiale : $f(0)=0$.

(a est une constante positive dépendant de la personne elle-même et de la quantité de médicament absorbée.)

On suppose que : $a=5$, l'équation *(E)* s'écrit : $y'(t)+y(t)=5e^{-t}$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Partie A.

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'(t)+y(t)=0$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2) Soit la fonction g, définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(t)=5te^{-t}$.

a) Montrer que : $g'(t)=5(1-t)e^{-t}$.

b) Vérifier que g est une solution particulière de (E).

3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation *(E)*.

4) Déterminer la solution f de l'équation *(E)*, vérifiant la condition initiale $f(0)=0$.

Partie B.

On admettra dans la suite que f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(t)=5te^{-t}$.

1) Étudier les variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

2) La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (2 cm pour 1 h en abscisse et 5 cm pour 1gramme par litre en ordonnée) est fournie en annexe 1.
Représenter graphiquement le maximum de la fonction ainsi que la tangente à la courbe en ce sommet.

3) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Comment interpréter médicalement ce résultat ?

4) Pour une concentration supérieure à un gramme par litre de sang, il y a un risque de somnolence. Déterminer **graphiquement** la période correspondant à ce risque.

Partie C.

1) Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(t)=-5e^{-t}-f(t)$ .Vérifier que c'est une primitive de f sur $[0;+\infty[$. On rappelle que f est solution de l'équation (E).

2) La concentration moyenne du médicament (en grammes par litre de sang) durant la première heure est donnée par : $T_m=\int_0^1 f(t)dt$.

Calculer cette concentration moyenne (on donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près.)

Exercice 2: (10 points)

Les trois parties sont indépendantes. Les résultats seront donnés à 0,001 près.

Une entreprise dispose d'une machine pour produire des tiges métalliques.
Une tige métallique est déclarée **conforme** si sa longueur est comprise entre 19,5 et 20,5 cm.

Partie A:

Soit L la variable aléatoire qui, à chaque tige métallique produite, associe sa longueur.
On suppose que L suit une loi normale de moyenne 20 et d'écart-type 0,3.

Calculer la probabilité qu'une tige métallique produite soit conforme.

Partie B.

On suppose que la probabilité qu'une pièce produite soit non conforme est de 0,1.
On prélève au hasard dans la production de tiges métalliques produites un échantillon de 50 tiges. La production est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.
Soit X la variable aléatoire qui à tout échantillon de taille 50 associe le nombre de tiges non conformes.

1) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X, dont on précisera les paramètres ? (Justifier.)

2) Calculer la probabilité que l'échantillon comporte au plus une tige non conforme.

3) On admet que la loi X peut être approchée par une loi de Poisson nommée Z. Quel est le paramètre de cette loi ?

4) En utilisant la variable aléatoire Z, calculer la probabilité que l'échantillon comporte au moins trois tiges non conformes.

Partie C.

Pour vérifier le dérèglement éventuel de la machine, une tige témoin est prélevée toutes les demi-heures. On obtient ainsi les résultats suivants: (*t=0* correspondant à *9h.*)

t_i : temps en *heure*.	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
L_i : Longueur de la tige témoin en *cm*.	20,01	20,04	20,07	20,15	20,18	20,22	20,25	20,31	20,35

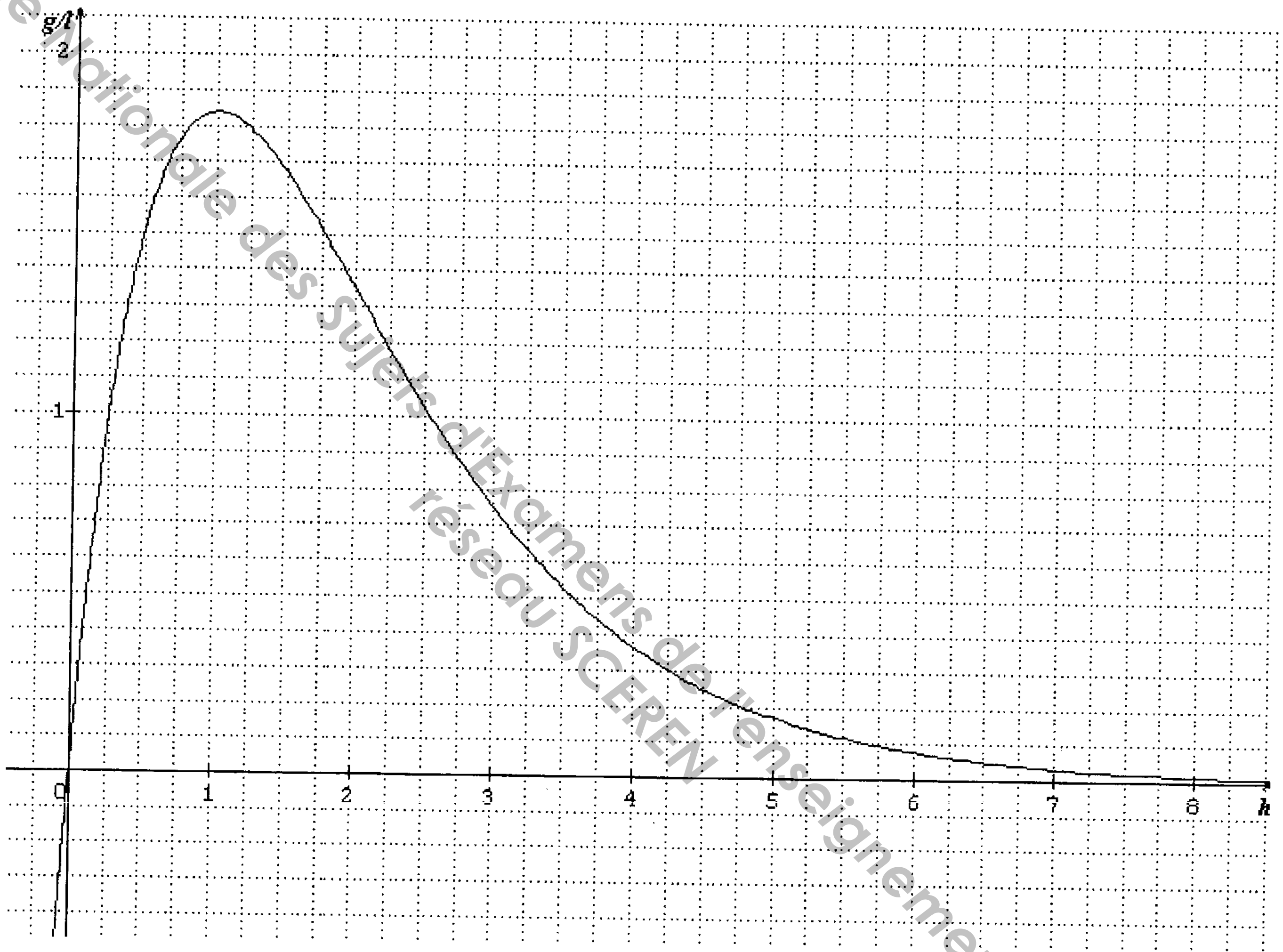
1) Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique $(t_i;L_i)$ dans un repère orthogonal du plan. (On utilisera l'annexe fournie avec une unité pour une demi- heure en abscisse et une unité pour 0,05 cm et l'origine est (0 ; 20))

2) Un ajustement affine de ce nuage de points semble-t-il approprié ? (Justifier.)

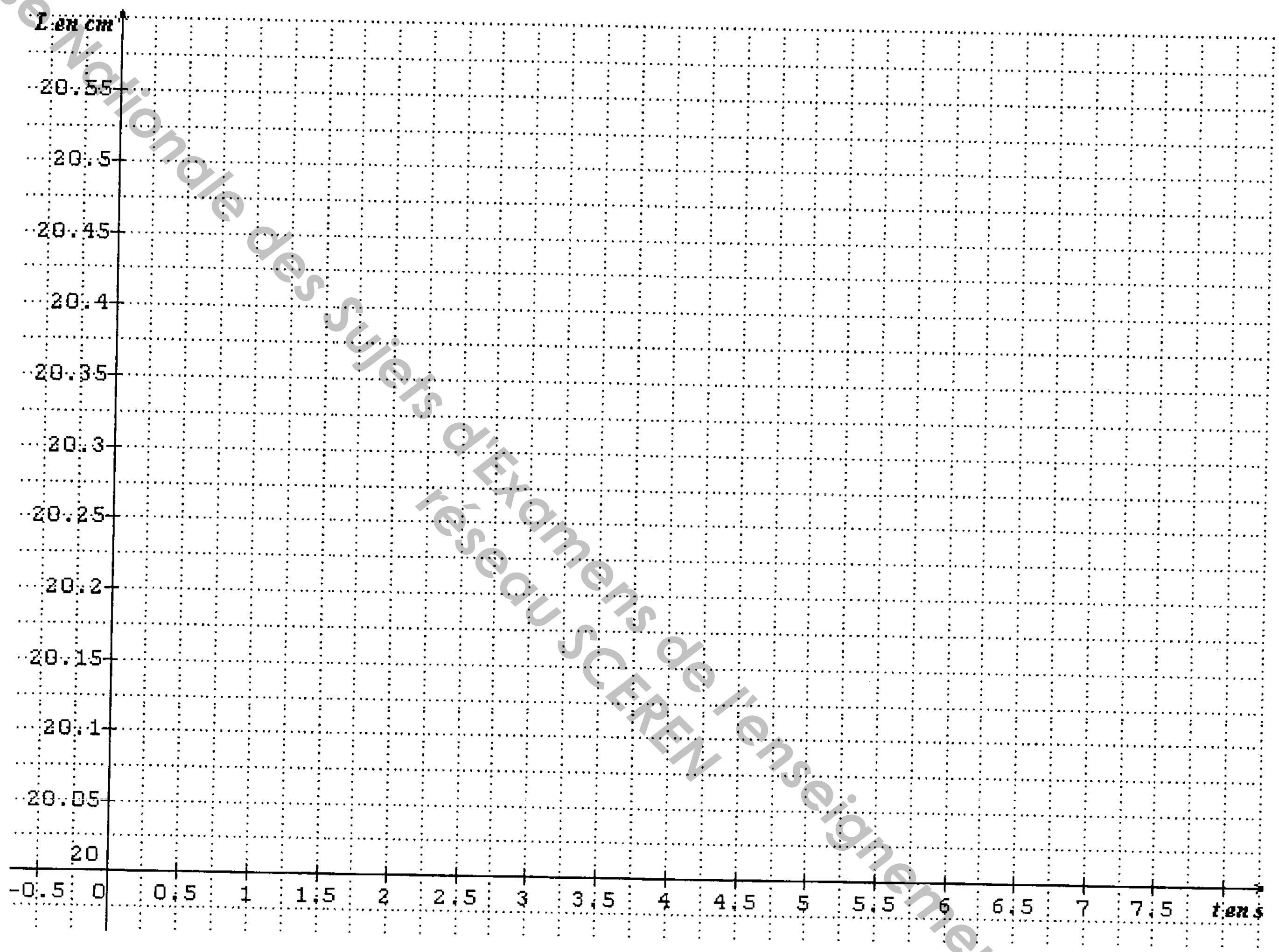
3) À l'aide de la calculatrice, donner une équation, sous la forme : $L = at + b$, de la droite d'ajustement affine de L en t par la méthode des moindres carrés (on arrondira a au millième et b au millième.). Tracer cette droite.

4) La machine doit être systématiquement réglée dès que la tige témoin devient non conforme.
En utilisant l'ajustement affine précédent, déterminer l'heure à laquelle il faudra régler la machine.

Annexe 1 : Exercice 1 Courbe représentative de f



Annexe 2 : Exercice 2



BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
AGENCEMENT DE L'ENVIRONNEMENT ARCHITECTURAL

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2\sin t \cos t$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t\to-\infty} \mathrm{e}^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t\to0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t\to0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\sin t$	$\cos t$
e^t	e^t	$\cos t$	$-\sin t$
t^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

d) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$x'' + \omega^2 x = 0$	$x(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$

3. *PROBABILITES*

a) Loi binomiale $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X)=np$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

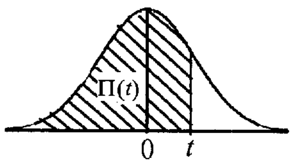
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) **Loi normale**

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$