CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

B.T.S. Groupement C MATHEMATIQUES
Session 2011

Correction

	Questions	Réponses	Barème
Exercice 1	A.1	$f(x)=(Ax+B)e^{-x}$, A et B constantes réelles	1,5
	A.2.	$b=2$	1,5
	A.3.	$f(x)=(Ax+B)e^{-x}+2$, A et B constantes réelles	1
	A.4.	$f(x)=(2x+1)e^{-x}+2$	1
	B.1.	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	0,5
	B.2.a.	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$	0,5
	B.2.b.	Asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y=2$.	0,5
	B.2.c.	Tracé en annexe de l'asymptote	0,5
	B.3.a.	$f'(x)=(1-2x)e^{-x}$	1
	B.3.b.	$\begin{array}{cccccc} x & -\infty & & 0{,}5 & & +\infty \\ \hline (1-2x) & & + & 0 & - & \\ \hline e^{-x} & & + & & + & \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f & -\infty & \nearrow & 2+2e^{-0{,}5} & \searrow & 2 \end{array}$	1
	B.4.a	$F'(x)=(2x+1)e^{-x}+2=f(x)$	1
	B.4.b	$A=4\int_0^2 f(x)dx=4\left[F(2)-F(0)\right]=28\left(1-e^{-2}\right)$ cm². D'où $A\approx 24{,}21$ cm².	1
Exercice 2			
	A.	$P(237{,}18\le X\le 238{,}82)\approx 0{,}959$	1
	B.1.	Un prélèvement est constitué de 50 épreuves identiques et indépendantes. Y_1 suit la loi binomiale de paramètres $n=50$ et $p=0{,}04$.	1
	B.2.	$P(Y_1=0)=0{,}96^{50}\approx 0{,}13$	1
	B.3.a.	Y_2 qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda=2$	1
	B.3.b.	$P(Y_2\leqslant 3)\simeq 0{,}857$	1
	C.1.	L'hypothèse alternative H_1 : « $\mu\neq 238$ ».	1
	C.2.	$h\approx 0{,}118$	1
	C.3.	On prélève un échantillon de 45 disques et on calcule la moyenne de leurs diamètres. • Si cette moyenne est dans l'intervalle [237,882 ; 238,118], on accepte H_0 au seuil de risque de 5 %. • Si cette moyenne n'est pas dans l'intervalle [237,882 ; 238,118], on rejette H_0 au seuil de risque de 5 % et on accepte H_1.	1
	C.4.	Oui car $\bar{z}=237{,}91\in[237{,}882\,;238{,}118]$.	1

Exercice 1

Partie A

1. (E_0) : $y''+2y'+y=0$.
   $r^2+2r+1=0 \Leftrightarrow (r+1)^2=0 \Leftrightarrow r=-1$.

Les solutions de (E_0) sont les fonctions f définies sur **R** par :

$$f(x)=(Ax+B)e^{-x}, \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes réelles.}$$

2. $\forall x \in \mathbf{R},\ g(x)=b$ donc $g'(x)=g''(x)=0$.

g solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R},\ g''(x)+2g'(x)+g(x)=2 \Leftrightarrow b=2$.
Donc $b=2$.

3. Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur **R** par :

$$f(x)=(Ax+B)e^{-x}+2, \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes réelles.}$$

4. Soit f une solution particulière de l'équation (E) sur **R**. $f(x)=(Ax+B)e^{-x}+2$.

On en déduit : $\begin{cases} f(0)=3 \\ f(-\frac{1}{2})=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B+2=3 \\ -\frac{A}{2}+B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=1 \\ A=2B=2 \end{cases}$. Donc $f(x)=(2x+1)e^{-x}+2$.

Partie B : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x)=(2x+1)e^{-x}+2$.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2. a. $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x)=2xe^{-x}+e^{-x}+2$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

b. On en déduit l'existence d'une asymptote horizontale D à C en $+\infty$ d'équation $y=2$.

c. Tracé de la droite en annexe.

3. a. On appelle f' la fonction dérivée de f sur **R**.

$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x)=2e^{-x}+(2x+1)(-e^{-x})+0=(2-2x-1)e^{-x}=(1-2x)e^{-x}$.

b.

x	$-\infty$		$0{,}5$		$+\infty$
$(1-2x)$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$2+2e^{-0,5}$	$\searrow$	2

4. Soit F la fonction définie sur **R** par : $F(x) = (-2x-3)e^{-x} + 2x$.

a. $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = -2e^{-x} + (-2x-3)(-e^{-x}) + 2 = (-2+2x+3)e^{-x} + 2 = (2x+1)e^{-x} + 2 = f(x)$.

Donc F est bien une primitive de f sur **R**.

b. f est positive sur [0 ; 2] et une unité graphique représente 2 cm donc une unité d'aire représente 4 cm². On en déduit l'aire A, en cm² :

$$A = 4\int_0^2 f(x)dx = 4\left[F(2) - F(0)\right] = 4\left[-7e^{-2} + 4 - (-3)\right] = 28\left(1 - e^{-2}\right)\text{cm}^2.$$

D'où $A \approx 24{,}21$ cm².

Exercice 2

Partie A

La probabilité qu'une pièce prise au hasard dans la production soit conforme pour son diamètre est égale à $P(237{,}18 \leq X \leq 238{,}82)$.

X suit la loi normale de moyenne 238 et d'écart type 0,4 donc la variable aléatoire $T = \dfrac{X-238}{0{,}4}$ suit la loi normale centrée réduite.

$P(237{,}18 \leq X \leq 238{,}82) \approx 0{,}959$

Partie B

1. Un prélèvement est constitué de 25 épreuves élémentaires, identiques et indépendantes puisque le prélèvement est associé à un tirage avec remise. Chaque épreuve peut déboucher sur deux issues, disque conforme ou non. Y_1 le nombre de tirages donnant un disque non-conforme donc Y_1 suit la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0{,}04$.

2. La probabilité que tous les disques du lot prélevé aient un diamètre conforme est $P(Y_1 = 0)$.

$P(Y_1 = 0) = 0{,}96^{25} \approx 0{,}36$.

3. a. Y_2 qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 25 \times 0{,}04 = 1$.
4.

b. La probabilité que le lot prélevé ait au plus 3 disques non-conformes est $P(Y_2 \leq 3)$.

$P(Y_2 \leq 3) = P(Y_2 = 0) + P(Y_2 = 1) + P(Y_2 = 2) + P(Y_2 = 3) \approx 0{,}368 + 0{,}368 + 0{,}184 + 0{,}061 \approx 0{,}981$.

Partie C

1. L'hypothèse alternative H_1 est « µ ? 238 ».

2. La variable aléatoire $\overline{T} = \dfrac{\overline{Z}-238}{0{,}06}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$P(238-h \leq \overline{Z} \leq 238+h) = 0{,}95 \Leftrightarrow P\left(\frac{-h}{0{,}06} \leq \overline{T} \leq \frac{h}{0{,}06}\right) = 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{h}{0{,}06}\right) - 1 = 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{0{,}06}\right) = 0{,}975.$$

D'où $\dfrac{h}{0{,}06} \approx 1{,}96$ soit $h \approx 0{,}118$.

3. La règle de décision du test est :

On prélève un échantillon de 45 disques et on calcule la moyenne de leurs diamètres.

- Si cette moyenne est dans l'intervalle [237,882 ; 238,118], on accepte H_0 au seuil de risque de 5 %.
- Si cette moyenne n'est pas dans l'intervalle [237,882 ; 238,118], on rejette H_0 au seuil de risque de 5 % et on accepte H_1.

4. Oui car $\overline{z} = 237{,}91 \in [237{,}882 ; 238{,}118]$.

Annexe (à rendre avec la copie)