BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

INFORMATIQUE DE GESTION

Options : - Développeur d'applications
- Administrateur de réseaux locaux d'entreprise

SESSION 2011

SUJET

ÉPREUVE E2 – MATHÉMATIQUES I

Durée : 3 heures **coefficient : 2**

Des feuilles de papier millimétré seront mises à la disposition des candidats.

***Calculatrice autorisée**, conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :*
« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.
Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Il comprend :

- **6 pages numérotées de la page 1 à 6 ;**
- **le formulaire de mathématiques composé de 4 pages.**

Exercice 1 (5 points)

Cet exercice est un Q.C.M. (questionnaire à choix multiple). Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, il n'existe qu'une seule réponse correcte.
On présentera les résultats en donnant le numéro de la question et en recopiant la réponse éventuellement choisie.

Barème : 1 point par réponse exacte, 0 point pour absence de réponse ou réponse fausse.

On considère un graphe à quatre sommets A, B, C, D, dont la matrice d'adjacence est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 1

Le sommet C est de niveau :

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

Question 2

Le nombre total de chemins de longueur 2 est :

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

Question 3

Il existe un chemin de longueur 3 allant :

a) de A vers C b) de B vers A c) de D vers B d) de A vers B

Question 4

Il existe dans ce graphe :

a) un chemin de longueur 4 ;
b) un chemin hamiltonien ;
c) un chemin de longueur 2 arrivant à D ;
d) un circuit.

Question 5

Pour obtenir la fermeture transitive de ce graphe, le nombre d'arcs à rajouter est :

a) 1 b) 3 c) 4 d) 9

Exercice 2 (8 points)

Une entreprise fabrique et commercialise des composants électroniques assemblés dans deux ateliers numérotés 1 et 2.
L'atelier 1 fournit 80 % de la production et l'atelier 2 fournit les 20 % restants.
On a remarqué que 1,5 % des composants issus de l'atelier 1 sont défectueux, et que 4 % des composants issus de l'atelier 2 sont défectueux.

Partie A

On prend au hasard un composant dans la production d'une journée et on considère les événements suivants :

- événement A : « le composant provient de l'atelier 1 » ;
- événement B : « le composant provient de l'atelier 2 » ;
- événement D : « le composant est défectueux ».

1. Déduire de l'énoncé les probabilités $P(A)$ et $P(B)$, ainsi que les probabilités conditionnelles $P_A(D)$ et $P_B(D)$.

2. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau à double entrée.

3. Calculer la probabilité de l'événement D.

4. On constate qu'un composant est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il provienne de l'atelier 1 ?

Dans la suite, on supposera que 2 % des composants produits par l'entreprise sont défectueux.

Partie B

Dans cette partie, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au millième.

Un client commande un lot de 150 composants.
On assimile le choix des 150 composants à des tirages successifs avec remise.
On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de composants défectueux que contient ce lot.

1. Justifier le fait que la variable aléatoire X suit une loi binomiale, et donner les paramètres de cette loi.

2. Donner l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

3. Calculer la probabilité d'avoir exactement 4 composants défectueux dans le lot. (Arrondir le résultat au millième.)

4. On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par la loi d'une variable aléatoire Y qui suit la loi de Poisson de paramètre 3.
   a) Justifier cette valeur du paramètre.
   b) Déterminer, avec la précision permise par les tables, la probabilité d'avoir strictement plus de 4 composants défectueux dans le lot.

Partie C

Une société d'import-export commande un lot de 1500 composants. On assimile le choix des 1500 composants à des tirages successifs avec remise.
La variable aléatoire qui comptabilise le nombre de composants défectueux dans ce lot, suit une loi binomiale. On admet que la loi de cette variable aléatoire peut être approchée par la loi d'une variable aléatoire Z qui suit la loi normale de moyenne 30 et d'écart-type 5,42.

1. Justifier le choix des paramètres de la loi normale.

2. Donner une approximation de la probabilité d'avoir au plus 20 composants défectueux dans un lot, en calculant $P(Z \leq 20{,}5)$.

3. Calculer $P(24{,}5 \leq Z \leq 35{,}5)$ avec la précision permise par les tables. En tenant compte de la correction de continuité, donner une interprétation du résultat en termes de composants défectueux.

Exercice 3 (7 points)

La feuille annexe sera rendue avec la copie. Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

Une entreprise fabrique un nouveau modèle d'appareils avec port USB. Le coût de fabrication de chaque appareil est de 10 euros. L'entreprise envisage de vendre chaque appareil entre 15 euros et 40 euros l'unité.
Avant la commercialisation l'entreprise effectue une étude de marché afin de déterminer la quantité demandée en fonction du prix de vente. L'étude a donné les résultats qui sont récapitulés dans le tableau suivant.

Prix unitaire (en euro) x_i	15	20	25	30	35	40
Quantité demandée (en milliers) y_i	44,4	27,0	16,3	10,0	6,2	3,5

On lit par exemple : pour un prix unitaire de 25 euros, la demande serait de 16 300 unités.

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonal. Les unités sont : 1 cm pour 2 euros en abscisse, et 1 cm pour 2 milliers en ordonnée. Le point d'intersection des axes de coordonnées sera le point de coordonnées (15 ; 0).

2. Le graphique précédent nous conduit à envisager un ajustement qui n'est pas affine. Pour cela, on effectue un changement de variable en posant : $z_i = \ln y_i$.

   a) Reproduire et compléter le tableau suivant.

x_i	15	20	25	30	35	40
$z_i = \ln y_i$	3,79	3,30				

b) À l'aide de la calculatrice, donner le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, z_i).

c) Donner une équation de la droite de régression de z en x sous la forme $z = ax + b$, où les coefficients a et b seront arrondis au dixième.

d) En déduire une estimation de la quantité demandée y en fonction du prix unitaire x sous la forme $y = k\,\mathrm{e}^{-Ax}$, où A et k sont des constantes que l'on déterminera. (Arrondir k à l'unité et A au dixième.)

Partie B

Dans cette partie, on suppose que, si chaque appareil est vendu au pris unitaire x (en euro), la quantité d'appareils demandés $f(x)$, en milliers d'unités, s'exprime par :

$$f(x) = 200\,\mathrm{e}^{-0,1x}.$$

La fonction f (fonction de demande) est définie sur l'intervalle [15 ; 40].
La représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée en annexe.

1. Déterminer graphiquement le montant de la demande si l'entreprise propose l'appareil à 23 euros.

2. Par le calcul, déterminer dans quel intervalle doit se situer le prix unitaire pour que la quantité demandée soit supérieure ou égale à 9000 unités.

3. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f. En déduire le sens de variation de la fonction f.

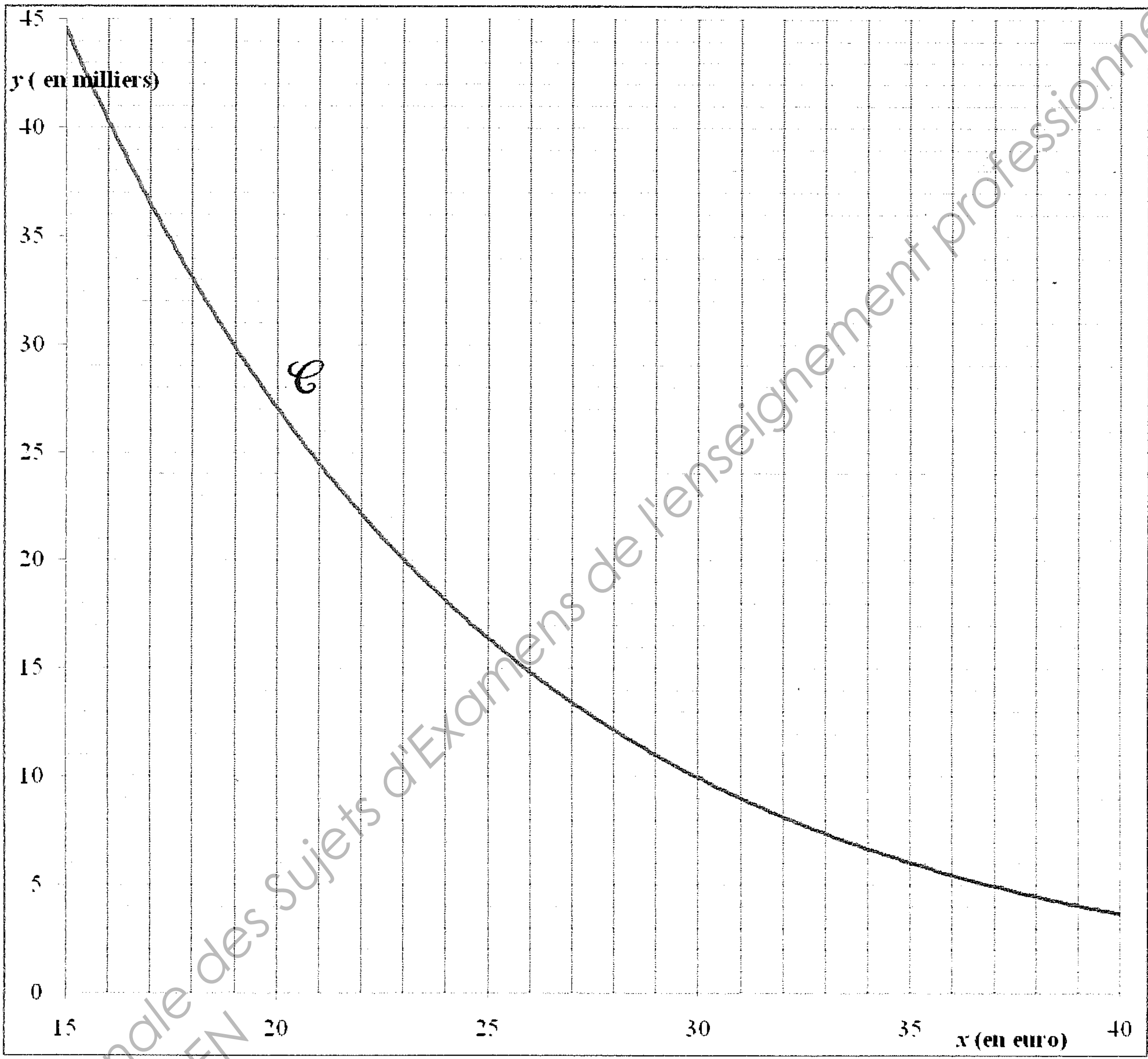
4. On appelle fonction d'offre la fonction g, définie sur l'intervalle [15 ; 40], par :
$$g(x) = 4x - 60.$$
Le nombre $g(x)$ est le nombre de milliers d'appareils que l'entreprise est capable de produire et de vendre au prix de x euros l'appareil.
Tracer sur la feuille annexe la représentation graphique de la fonction g.

5. On appelle prix d'équilibre le prix unitaire x d'un appareil pour lequel l'offre est égale à la demande.
   a) Déterminer graphiquement le prix d'équilibre.
   b) Déterminer graphiquement combien l'entreprise peut compter vendre d'appareils, au prix d'équilibre.
   c) Estimer alors le bénéfice réalisé.
   On rappelle que le coût de fabrication d'un appareil est de 10 euros.

6. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_{15}^{21} f(x)\,\mathrm{d}x$.

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Le dessin à compléter pour l'exercice 3.



FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS INFORMATIQUE DE GESTION

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES :*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$\left(e^u\right)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties (PROGRAMME FACULTATIF) :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités (PROGRAMME FACULTATIF)

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n\varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t)$$

e) Équations différentielles (PROGRAMME FACULTATIF)

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = k e^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$

3. PROBABILITES :

a) Loi binomiale $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

$E(X)=np \qquad \sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) Loi exponentielle (PROGRAMME FACULTATIF)

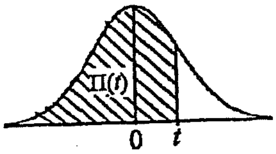
Fonction de fiabilité : $R(t)=e^{-\lambda t}$ $\qquad E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\qquad \sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t)=P(T\leq t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t)=1-\Pi(t)$