



SERVICES CULTURE ÉDITIONS
RESSOURCES POUR
L'ÉDUCATION NATIONALE

Ce document a été numérisé par le CRDP de Bordeaux pour la
Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel.

Campagne 2012

Brevet de Technicien Supérieur

Groupement A1

MATHÉMATIQUES

SESSION 2012

SPÉCIALITÉS	COEFF	DURÉE
CONTRÔLE INDUSTRIEL ET RÉGULATION AUTOMATIQUE	2	3

Matériel autorisé :

Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique sont autorisées à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

circulaire 99-186 du 16 novembre 1999

Document à rendre et àagrafer avec la copie :

Document réponsepage 8/10

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 10 pages numérotées de 1 à 10.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

BTS		Session 2012
Mathématiques	code: MATGRA1	Page : 1/10

EXERCICE 1 (10 points)

On notera \mathcal{U} la fonction échelon unité définie sur l'ensemble des nombres réels telle que :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels est dite causale lorsque cette fonction est nulle sur l'intervalle $] - \infty; 0[$.

On note e l'échelon causal discret, défini sur l'ensemble des nombres entiers relatifs par :

$$\begin{cases} e(n) = 0 & \text{si } n < 0 \\ e(n) = 1 & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

On considère un système entrée-sortie du premier ordre. Le signal de sortie est modélisé par une fonction causale s telle que $s(0) = 0$ et vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$2s'(t) + s(t) = 3\mathcal{U}(t).$$

Le signal d'entrée prend, à tout instant t , la valeur $3\mathcal{U}(t)$.



Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle

$$2y'(t) + y(t) = 0.$$

2. On considère l'équation différentielle (E) :

$$2y'(t) + y(t) = 3.$$

Déterminer la fonction constante h solution de cette équation différentielle.

3. En déduire que, pour tout nombre réel t positif ou nul, on a :

$$s(t) = 3 - 3e^{-0,5t}.$$

4. (a) Etudier le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
(b) Préciser la valeur du nombre réel ℓ , limite de $s(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

BTS		Session 2012
Mathématiques	code: MATGRA1	Page : 2/10

5. L'annexe 1 jointe au sujet comporte quatre courbes représentatives de fonctions causales. Parmi ces quatre courbes, laquelle représente la fonction s ? Justifier ce choix.
6. On appelle temps de réponse du système la valeur du nombre réel t à partir de laquelle $s(t)$ atteint 95 % de la valeur de la limite ℓ calculée à la question 4. Déterminer une valeur approchée du temps de réponse de ce système. Plusieurs méthodes sont possibles, préciser la démarche choisie.

Partie B

On s'intéresse maintenant à un système entrée-sortie numérique destiné à approcher le système analogique étudié dans la partie A. Une discrétisation de l'équation différentielle (E) avec un pas de discrétisation T_e permet d'obtenir, pour tout entier naturel n , la relation (E') suivante :

$$2 \frac{x(n+1) - x(n)}{T_e} + x(n+1) = 3.$$

Pour tout nombre entier n , le nombre réel $x(n)$ fournit une approximation de $s(nT_e)$.

En particulier, on a :

$$x(0) = s(0) = 0.$$

Pour toute la suite de l'exercice, on prend $T_e = 0,1$ seconde.

1. Montrer que la relation (E') peut s'écrire, pour tout nombre entier positif ou nul, sous la forme

$$x(n+1) = \frac{20}{21}x(n) + \frac{1}{7}.$$

2. On a rempli le tableau de valeurs ci-dessous.

n	0	1	2	3
$x(n)$	0	0,143	0,279	0,408

Calculer des valeurs approchées à 10^{-3} près des nombres réels $x(4)$ et $x(5)$.

3. On note $X(z)$ la transformée en \mathcal{Z} de la suite $x(n)$.

Déduire de la question 1 que

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{7(z-1) \left(z - \frac{20}{21} \right)}.$$

4. Déterminer les nombres réels A et B tels que

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{z-1} - \frac{B}{z - \frac{20}{21}}.$$

5. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a :

$$x(n) = 3 \left(1 - \left(\frac{20}{21} \right)^n \right).$$

6. (a) Préciser la limite de $x(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

(b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $1 - \left(\frac{20}{21} \right)^n \geq 0,95$.

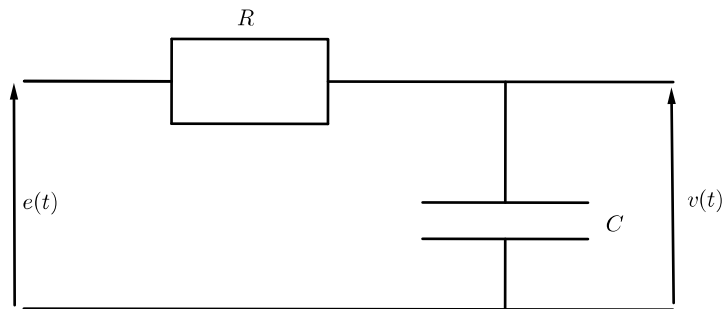
(c) En déduire, à 10^{-1} près, le temps de réponse en secondes du système numérique. (La notion de temps de réponse d'un système a été défini à la question 6 de la partie A.)

Base Nationale de l'enseignement professionnel
réseau SCEREN

BTS		Session 2012
Mathématiques	code: MATGRA1	Page : 4/10

EXERCICE 2 (10 points)

Un circuit électrique comporte, en série, une résistance R et un condensateur de capacité C .



Le circuit est alimenté par une tension « source » représentée par une fonction e . La tension aux bornes du condensateur est représentée par une fonction v . Si on considère cette tension comme signal de « sortie », le circuit joue le rôle de filtre passe-bas.

On notera \mathcal{U} la fonction échelon unité définie sur l'ensemble des nombres réels telle que :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Partie A

Les fonctions e et v vérifient l'équation différentielle (\mathcal{E}) suivante :

$$RC \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = e(t).$$

De plus, on suppose que $v(t) = 0$ pour tout nombre réel t négatif ou nul. En particulier, on a $v(0) = 0$.

On admet que les fonctions e et v possèdent des transformées de Laplace, notées respectivement E et V .

1. La tension e appliquée en entrée au circuit est telle que, pour tout nombre réel t :

$$e(t) = 10\mathcal{U}(t).$$

- (a) Tracer sur la copie une représentation graphique de la fonction e .
- (b) Exprimer $E(p)$.

2. En appliquant la transformation de Laplace à l'équation différentielle (\mathcal{E}), montrer que :

$$V(p) = \frac{10}{p(RCp + 1)}.$$

BTS		Session 2012
Mathématiques	code: MATGRA1	Page : 5/10

3. (a) Vérifier que

$$V(p) = \frac{10}{p} - \frac{10}{p + \frac{1}{RC}}$$

(b) En déduire l'expression de $v(t)$ pour tout nombre réel t positif ou nul en fonction de t , R et C .

Partie B

Dans toute la suite, j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
La transmittance isochrone T du circuit est définie, pour toute pulsation ω , par :

$$T(\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}}$$

1. On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.
Montrer que :

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

2. Calculer $T(\omega_0)$. Déterminer alors le module et un argument du nombre complexe $T(\omega_0)$.

3. Cette question est posée sous la forme d'un QCM. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, on écrira sur la copie la formule choisie. L'absence de réponse ou une mauvaise réponse n'est pas pénalisante.

(a) Parmi les quatre expressions ci-dessous, laquelle donne le module du nombre complexe $T(\omega)$?

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad 1 + \frac{\omega}{\omega_0} \quad \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

(b) Parmi les quatre expressions ci-dessous, laquelle donne un argument du nombre complexe $T(\omega)$?

$$-\arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \quad \frac{\omega}{\omega_0} \quad -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

4. Vérifier la concordance entre les résultats trouvés aux questions 2 et 3a puis 2 et 3b.

5. Pour une pulsation ω de la tension d'entrée e , le gain $G_{\text{db}}(\omega)$ du circuit, exprimé en décibels, est donné par la formule

$$G_{\text{db}}(\omega) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(|T(\omega)|).$$

BTS		Session 2012
Mathématiques	code: MATGRA1	Page : 6/10

Calculer, à une unité près, le gain correspondant à la pulsation ω_0 .

6. **Pour toute la suite de l'exercice, on se place dans le cas où $\omega_0 = 500$.**

Pour tout nombre réel ω appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, on pose

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{500}\right)$$

et on note $M(\omega)$ le point de coordonnées $(\varphi(\omega); G_{\text{db}}(\omega))$.

Le point $M(\omega)$ décrit la courbe tracée sur la figure du document réponse lorsque ω varie.

(a) Calculer $\varphi(\omega_0)$.

(b) Placer alors le point $M_0 = M(500)$.

(c) En déduire graphiquement l'ordonnée du point M_0 .

7. On admet que la fonction φ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

La valeur de ω correspondant au point M_1 du document réponse est-elle :

– strictement inférieure à 500 ?

– égale à 500 ?

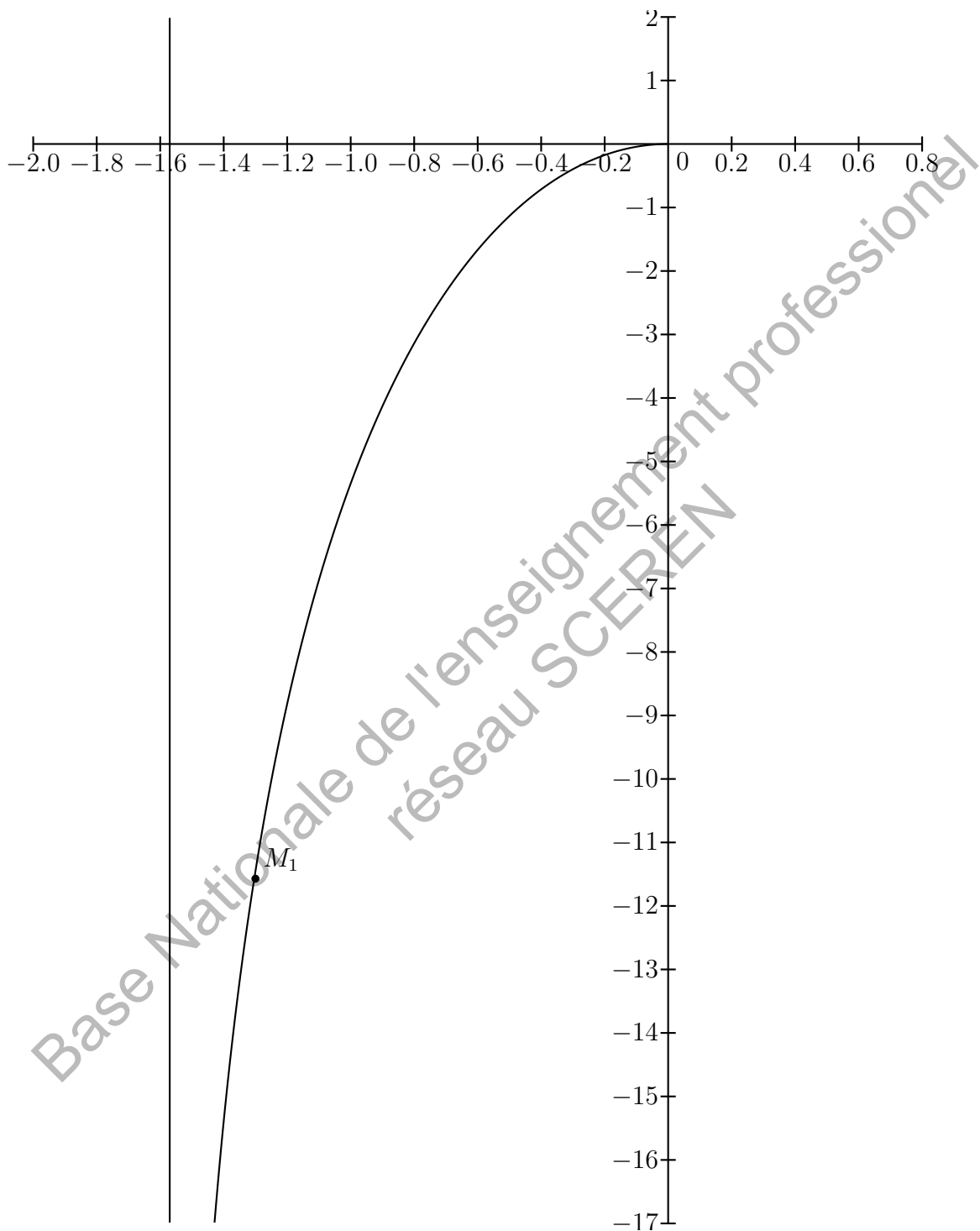
– strictement supérieure à 500 ?

On justifiera la réponse.

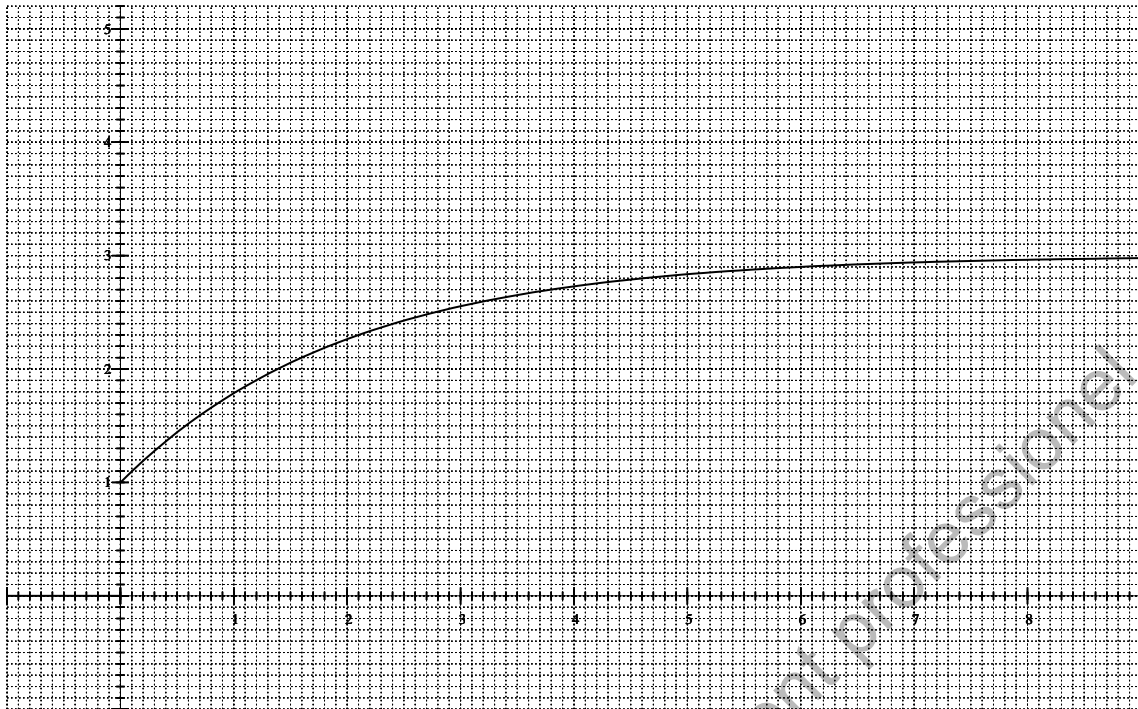
Base Nationale de l'enseignement professionnel
réseau SCEREN

BTS		Session 2012
Mathématiques	code: MATGRA1	Page : 7/10

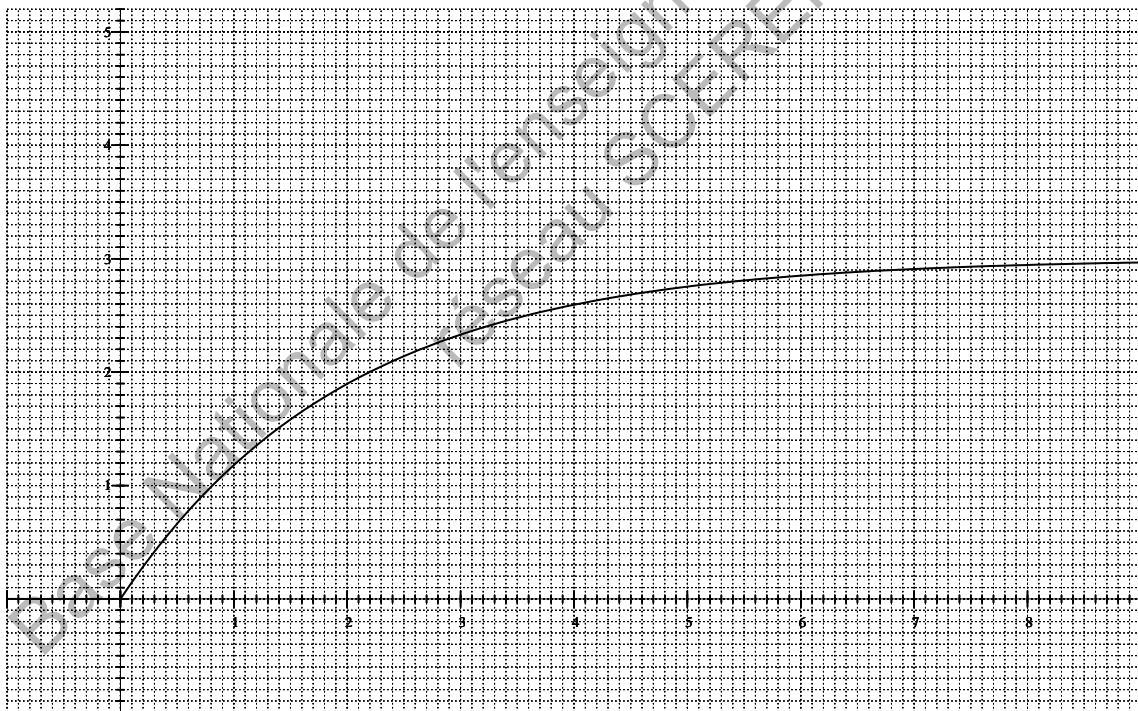
Document réponse



Annexe 1

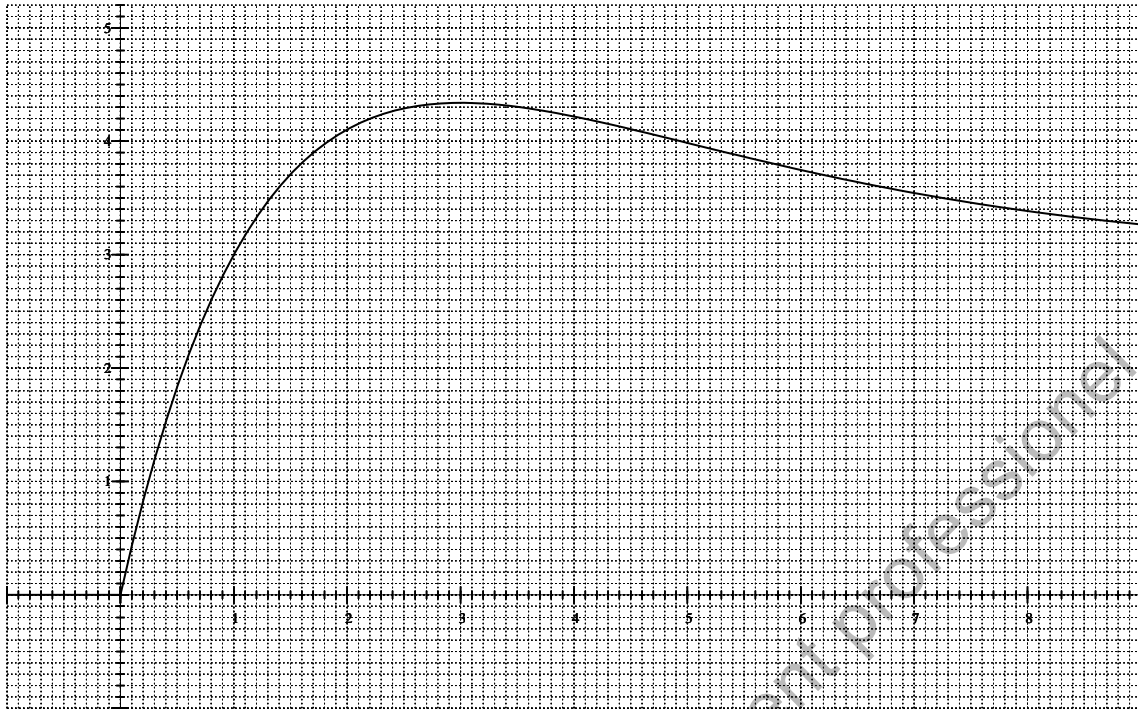


Courbe 1

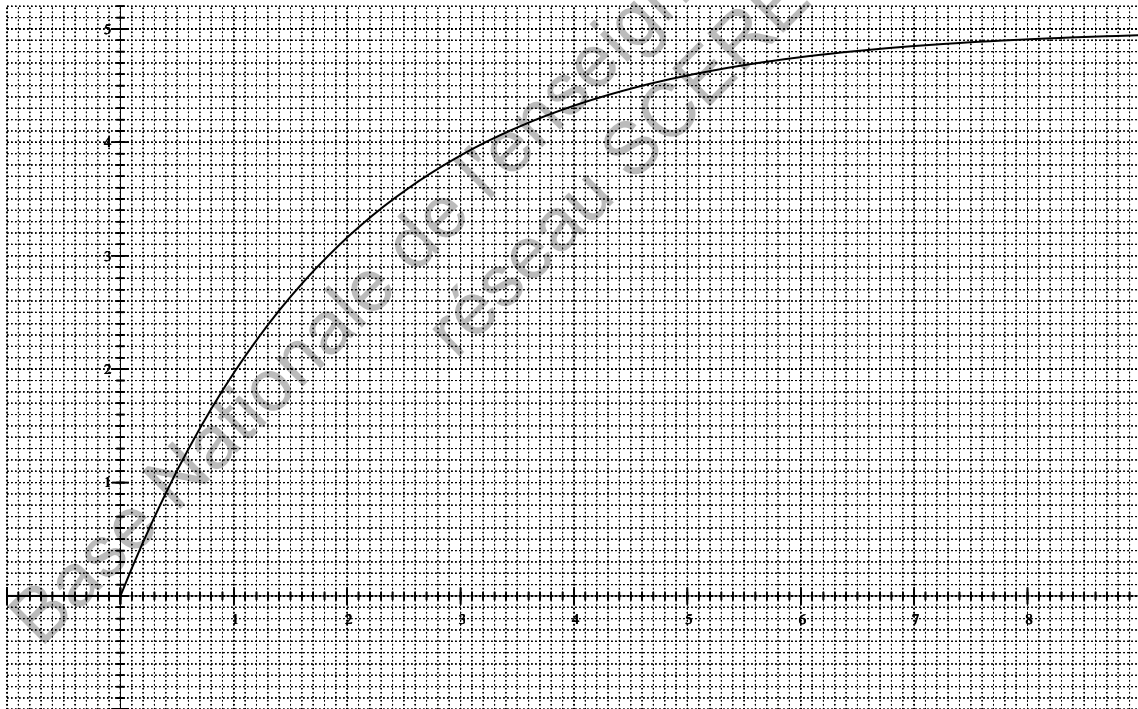


Courbe 2

Annexe 1 (suite)



Courbe 3



Courbe 4

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

GROUPEMENT A

CONTROLE INDUSTRIEL ET REGULATION AUTOMATIQUE

ELECTROTECHNIQUE

GENIE OPTIQUE

INFORMATIQUE ET RESEAUX POUR L'INDUSTRIE ET LES
SERVICES TECHNIQUES

SYSTEMES ELECTRONIQUES

TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE
LABORATOIRE

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \text{ où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \text{ où } t > 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2\sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

$$e^{a+ib} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	Arc sin t	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	Arc tan t	$\frac{1}{1+t^2}$
t^α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha t^{\alpha-1}$	e^{at} ($a \in \mathbb{C}$)	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Equations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ar^2 + br + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
de discriminant Δ	

3. SÉRIES DE FOURIER

f : fonction périodique de période T ;

développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega t}, \quad (n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(n\omega t) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad c_0 = a_0; \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n; \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

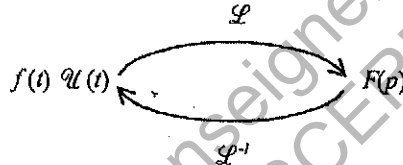
4. TRANSFORMATION DE LAPLACE

Fonctions usuelles

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p}; \quad \mathcal{L}(t\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p^2}; \quad \mathcal{L}(t^n \mathcal{U}(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$\mathcal{L}(e^{-at} \mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p+a}; \quad \mathcal{L}(\sin(\omega t) \mathcal{U}(t)) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \quad \mathcal{L}(\cos(\omega t) \mathcal{U}(t)) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Propriétés



$f(\alpha t) \mathcal{U}(t) \quad \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
$f(t-\tau) \mathcal{U}(t-\tau)$	$F(p) e^{-\tau p}$
$f(t) e^{-at} \mathcal{U}(t)$	$F(p+a)$
$f'(t) \mathcal{U}(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f''(t) \mathcal{U}(t)$	$p^2 F(p) - p f(0^+) - f'(0^+)$
$-t f(t) \mathcal{U}(t)$	$F'(p)$
$\int_0^t f(u) \mathcal{U}(u) du$	$\frac{F(p)}{p}$

5. TRANSFORMATION EN Z

Signal causal $n \mapsto x(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$	Transformée en Z $z \mapsto (Zx)(z)$
$e(n) = 1$	$(Ze)(z) = \frac{z}{z-1}$
$\begin{cases} d(0) = 1 \\ d(n) = 0 \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$	$(Zd)(z) = 1$
$r(n) = n$	$(Zr)(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$
$c(n) = n^2$	$(Zc)(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$f(n) = a^n, a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$(Zf)(z) = \frac{z}{z-a}$
$y(n) = a^n x(n), a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$(Zy)(z) = (Zx)\left(\frac{z}{a}\right)$
$y(n) = x(n - n_0), (n - n_0) \in \mathbb{N}$ ou $y(n) = x(n - n_0) e(n - n_0)$	$(Zy)(z) = z^{-n_0} (Zx)(z)$
$y(n) = x(n + 1)$	$(Zy)(z) = z[(Zx)(z) - x(0)]$
$y(n) = x(n + 2)$	$(Zy)(z) = z^2[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1}]$
$y(n) = x(n + n_0), n_0 \in \mathbb{N}^*$	$(Zy)(z) = z^{n_0} [(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2} \dots - x(n_0 - 1)z^{-(n_0-1)}]$

6. PROBABILITES

a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

$k \backslash \lambda$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

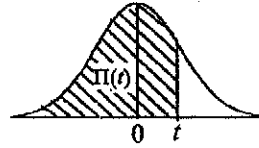
$k \backslash \lambda$	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$