CORRIGE

Ces éléments de correction n'ont qu'une valeur indicative. Ils ne peuvent en aucun cas engager la responsabilité des autorités académiques, chaque jury est souverain.

EXERCICE 1 (10 points)

	Eléments de réponses	
Partie A: résolution d'une équation différentielle		
A 1) a)	$g'(t) = -\frac{f'(t)}{[f(t)]^2}$	
A 1) b)	Pour tout réel positif, $g'(t) = -\frac{f'(t)}{[f(t)]^2} = -\frac{k\,f(t)(f(t)-50)}{[f(t)]^2} = -\frac{k(f(t)-50)}{f(t)} = \frac{50k}{f(t)} - k = 50\,k\,g(t) - k$	
A 2) a)	Les solutions de (E_0) sont définies sur $[0; +\infty[$ par $u(t) = C\,e^{50\,kt}$ où C est une constante réelle quelconque .	
A 2) b)	La constante λ cherchée vérifie $0 = 50\,k\,\lambda - k$ soit $\lambda = \frac{1}{50}$; Les solutions de (E) sont définies sur $[0; +\infty[$ par $v(t) = C\,e^{50\,kt} + \frac{1}{50}$ où C est une constante réelle quelconque	
A 2) c)	g est une solution de (E) , avec pour condition initiale $g(0) = \frac{1}{300}$. Calcul de la constante C: pour t = 0 , on a $g(0) = C + \frac{1}{50}$ soit $\frac{1}{300} = C + \frac{1}{50}$ d'où $C = -\frac{1}{60}$ On obtient alors $g(t) = \frac{1}{50} - \frac{1}{60}e^{50\,kt}$	

A 2)d)	de $f(t) = \dfrac{1}{g(t)}$, on obtient $f(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{50} - \frac{1}{60} e^{50\,kt}} = \dfrac{300}{6 - 5\,e^{50\,kt}}$	
Partie B: Etude d'une fonction		
B 1)	Pour $t \geq 0$, $f'(t) = -\dfrac{300 \times (-5) \times 50\,k\,e^{50\,kt}}{(6 - 5\,e^{50\,kt})^2} = \dfrac{7500\,k\,e^{50\,kt}}{(6 - 5\,e^{50\,kt})^2}$; comme $k < 0$, on a $f'(t) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$	
B 2)	$k < 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{50\,kt} = 0$ d'où $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \dfrac{300}{6} = 50$	
Partie C: Applications		
C 1)	On a f(10)= 100 d'où $\dfrac{300}{6 - 5\,e^{500\,k}} = 100 \Leftrightarrow 6 - 5\,e^{500\,k} = 3 \Leftrightarrow e^{500\,k} = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow k = \dfrac{\ln(\frac{3}{5})}{500}$ ce qui donne $k = -0{,}00102$ à 10^{-5} près	
C 2)	On a résoudre $f(t) \leq 60 \Leftrightarrow \dfrac{300}{6 - 5\,e^{50\,kt}} \leq 60 \Leftrightarrow \dfrac{5}{6 - 5\,e^{50\,kt}} \leq 5 \Leftrightarrow 5\,e^{50\,kt} \leq 1 \Leftrightarrow 50\,kt \leq \ln(0{,}2)$ $\Leftrightarrow t \geq \dfrac{\ln(0{,}2)}{50\,k}$ $(k < 0)$ comme $k = \dfrac{\ln(\frac{3}{5})}{500}$, on obtient $t_2 = \dfrac{\ln(0{,}2)}{50\,\frac{\ln(\frac{3}{5})}{500}} = \dfrac{10\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}6)}$ soit $t_2 = 31{,}5$ à 0,01 près	

EXERCICE 2 (10 points)

	Eléments de réponses						
Partie A							
1°) a) et b)	Expérience	Moyenne	X_1	X_2	X_1X_2	Y	
	1	1	**– 1**	– 1	1	**134**	
	2	1	**1**	–1	– 1	**140**	
	3	1	**– 1**	1	– 1	**118**	
	4	1	**1**	1	1	**120**	
	effets	$a_0 = 128$	$a_1 = 2$	$a_2 = -9$	$a_{12} = -1$		
1°) c)	à l'expérience 2 , $X_1 = 1$, $X_2 = -1$ et $X_1X_2 = -1$. Les quantités $2X_1$, $-9X_2$ et $-X_1X_2$ sont alors maximales, leur somme Y est donc dans ce cas maximale prenant la valeur 140.						
1°) d)	Si $X_1 = 0$, on a $Y = 128 - 9X_2$ ce qui est l'équation d'une fonction affine décroissante en X_2 , la conductivité diminue donc lorsque le facteur X_2 augmente.						
2°)	La valeur 4,4 en M_1 correspond à $X_1 = 0$ et la valeur $1{,}1 = \frac{0{,}7 + 1{,}5}{2}$ en M_2 correspond à $X_2 = 0$ d'où le résultat.						
3°) a)	On veut $128 + 2X_1 - 9X_2 - X_1X_2 = 128$ avec $X_1 = -1$ d'où $-2 - 8X_2 = 0$ soit $X_2 = -\frac{1}{4} = -0{,}25$						
3°) b)	de $f(-1) = 0{,}7$ et $f(1) = 1{,}5$, on obtient $a = 0{,}4$ et $b = 1{,}1$ d'où $f(-0{,}25) = 1$. La teneur en M_2 à choisir pour réaliser l'alliage est donc 1.						

Partie B

1°)	L'hypothèse alternative est $H_1 : m \neq 128$	
2°)	On pose $\overline{T} = \dfrac{\overline{X} - 128}{\frac{3}{8}}$, $\overline{T}$ suit la loi normale centrée réduite On a $P(128 - h \leq \overline{X} \leq 128 + h) = P(-\frac{8}{3}h \leq T \leq \frac{8}{3}h) = 2\,\Pi(\frac{8}{3}h) - 1$ On a à résoudre $2\,\Pi(\frac{8}{3}h) - 1 = 0{,}99$ soit $\Pi(\frac{8}{3}h) = 0{,}995$ Par lecture inverse dans la table de la loi centrée réduite, on obtient $2{,}57 \leq \frac{8}{3}h \leq 2{,}58$ soit $0{,}96375 \leq h \leq 0{,}9675$; $h = 0{,}96$ à $0{,}01$ près	
3°)	règle de décision du test: On prélève au hasard un échantillon de taille 64 et on mesure la moyenne $\overline{x}$ des conductivités des pièces qui le composent; si $\overline{x} \in [127{,}04; 128{,}96]$ on accepte H_0; si $\overline{x} \notin [127{,}04; 128{,}96]$ alors on rejette H_0	
4°)	La moyenne pour cet échantillon est 127,5625 et appartient à l'intervalle d'acceptation de H_0 ; On valide donc H_0 et l'on considère , au risque de 1% que l'on a $m = 128$	