SERVICES CULTURE ÉDITIONS
RESSOURCES POUR
L'ÉDUCATION NATIONALE

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2012

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B *CODE : MATGRB1*

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENT
Aéronautique	2
Aménagement finition	2
Après-vente automobile	2
Assistance technique d'ingénieur	2
Bâtiment	2
Conception et réalisation de carrosseries	2
Construction navale	2
Constructions métalliques	2,5
Domotique	2
Enveloppe du bâtiment : façade – étanchéité	2
Études et économie de la construction	2
Fluide – énergie – environnement	2
Géologie appliquée	1,5
Industrialisation des produits mécaniques	2
Maintenance et après-vente des engins de travaux publics et de manutention	1
Maintenance industrielle	2
Mécanique et automatismes industriels	2
Moteurs à combustion interne	2
Traitement des matériaux	3
Travaux publics	2

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.
Un formulaire de 5 pages est joint au sujet.

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (12 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = -5\,e^{-2x}$,
où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1° Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 2y = 0$.

2° Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5x\,e^{-2x}$. Démontrer que la fonction g est une solution de (E).

3° En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-5x)\,e^{-2x}$. On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1° a) On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x\,e^{-2x} = 0$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
La courbe C admet une asymptote en $+\infty$ dont une équation est :

$y = 1 - 5x$	$y = 0$	$x = 0$

2° a) À l'aide du développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \mapsto e^{t}$, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction :
$x \mapsto e^{-2x}$.

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 1 - 7x + 12x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

d) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe C est au-dessus de la droite T. Recopier sur la copie la justification qui vous paraît exacte.

$12\,x^2$ est positif au voisinage de 0.	$x^2\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0.	$1 - 7x$ est positif au voisinage de 0.

C. Calcul intégral

1° On note $I = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction définie dans la partie *B*.

a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = \dfrac{23\mathrm{e}^{-4} - 13\mathrm{e}^{-2}}{4}$.

b) Donner la valeur approchée de I, arrondie à 10^{-2}.

2° a) Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ pour x dans l'intervalle [1, 2].

b) Interpréter graphiquement le nombre I.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.

EXERCICE 2 (8 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Un particulier souhaite acheter, auprès d'un producteur, des bottes de paille pour l'isolation de sa maison.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. Loi normale

On prélève au hasard une botte de paille dans la production du 20 juillet 2011.

1° On note X la variable aléatoire qui, à chaque botte ainsi prélevée, associe son épaisseur, exprimée en millimètres. On admet que X suit la loi normale de moyenne 360 et d'écart type 18.
Calculer la probabilité $P(350 \leq X \leq 370)$.

2° On note Y la variable aléatoire qui, à chaque botte prélevée dans la production de cette journée, associe sa densité exprimée en kg/m ^{3}. On admet que Y suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type 5.
Calculer la probabilité qu'une botte prélevée dans la production de cette journée ait une densité comprise entre 90 kg/m ^{3} et 110 kg/m ^{3}.

3° On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
Une botte de paille est conforme aux normes d'isolation si son épaisseur, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle [350, 370] et si sa densité, exprimée en kg/m ^{3}, appartient à l'intervalle [90, 110].
Calculer la probabilité qu'une botte prélevée dans la production de cette journée soit conforme aux normes d'isolation.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.

B. Loi binomiale

On considère un stock important de bottes de pailles, dont une partie est destinée à un usage d'isolation. On note E l'événement : « une botte prélevée au hasard dans le stock est conforme aux normes d'isolation ».
On suppose que $P(E) = 0,4$.
On prélève au hasard 5 bottes de paille dans le stock pour vérification de la conformité aux normes d'isolation. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 5 bottes.
On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement de 5 bottes ainsi défini, associe le nombre de bottes de paille conformes aux normes d'isolation.

1° Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2° Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, toutes les bottes de paille soient conformes aux normes d'isolation.

3° Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins quatre bottes de paille soient conformes aux normes d'isolation.

C. Intervalle de confiance

Dans cette partie, on considère les bottes de paille produites le 22 juillet 2011. On prélève au hasard un échantillon de 50 bottes de pailles dans cette production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On constate que 37 bottes de pailles de cet échantillon sont conformes aux normes d'isolation.

1° Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des bottes de paille de cette production qui sont conformes aux normes d'isolation.

2° Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 bottes ainsi prélevé dans cette production, associe la fréquence des bottes de cet échantillon qui sont conformes aux normes d'isolation.

On suppose que F suit la loi normale de moyenne inconnue p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{50}}$.

a) Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p au niveau de confiance de 95%.
b) On considère l'affirmation suivante : « la fréquence p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question 2° a) ».
Cette affirmation est-elle vraie ? (Donner la réponse sans explication.)