Ce document a été numérisé par le CRDP de Bordeaux pour la
Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel.

Campagne 2012

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES DU GROUPEMENT C

SESSION 2012

DURÉE : 2 HEURES

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENT
Agroéquipement	1
Charpente-couverture	1,5
Communication et industries graphiques	2
Conception et réalisation en chaudronnerie industrielle	2
Développement et réalisation bois	2
Etude et réalisation d'outillages de mise en forme des matériaux	2
Fonderie	2
Industries céramiques	2
Industries des matériaux souples (deux options)	1
Industries papetières (deux options)	2
Mise en forme des matériaux par forgeage	2
Productique textile (quatre options)	3
Systèmes constructifs bois et habitat	1,5

Calculatrice autorisée :

Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante (circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999).

Documents à rendre avec la copie :

Annexe 1 : page 5/6
Annexe 2 : page 6/6

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte : 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6
et le formulaire de mathématiques pages 1 à 5.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (9 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Le thermomètre de Galilée est composé d'un cylindre en verre clos rempli d'un liquide dans lequel on a placé des petites boules de même volume et de masses différentes. Lorsque la température du liquide varie, les boules vont monter ou descendre, indiquant ainsi la température ambiante.

Partie 1

Lors de la construction d'un tel thermomètre, l'étude de la chute d'une boule dans un fluide conduit à l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : \ y' + \frac{1}{2} y = \frac{13}{2}$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et où y' est la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2}y = 0$.
2. Déterminer le réel k tel que la fonction g, définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = k$, soit une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la fonction f, définie sur $[0\,;+\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = 13\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\right)$.

Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est représentée sur le graphique joint en annexe 1, page 5 à rendre avec la copie.

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$. Calculer $f'(t)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
3. Démontrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale $\mathscr{D}$ dont on précisera une équation.
4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Tracer T sur le graphique joint en annexe 1, page 5 à rendre avec la copie.

Partie 3

On admet que la vitesse de chute de la boule à l'instant t est égale à $f(t)$. La vitesse est exprimée en mm.s^{-1} et le temps est donné en secondes.

1. Déterminer graphiquement à partir de quel instant la vitesse de chute de la boule dépasse 10 mm.s^{-1}.
2. Retrouver le résultat précédent par le calcul.
3. Calculer la vitesse moyenne V_m de chute de la boule entre les instants $t = 2$ et $t = 4$. On donnera une valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près.

   On rappelle que $V_m = \frac{1}{2}\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 2 (11 points)

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Une usine fabrique des pièces en bois dont la cote principale C doit être égale à 15 mm.

Partie A

Pour un réglage donné de la machine-outil qu'il utilise pour la réalisation de ces pièces, un opérateur s'est aperçu que la cote, obtenue dans les conditions de mise en œuvre sur un chantier, varie en fonction du taux d'humidité du bois, lors du travail en atelier. Il réalise quelques mesures, dont les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Rang i	1	2	3	4	5	6
t_i : taux d'humidité	11,2	11,6	12	12,4	12,8	13
C_i : cote (en mm)	15,25	15,17	15,07	14,93	14,82	14,81

Le nuage de cette série statistique (t_i, C_i) est donné en annexe 2, page 6 à rendre avec la copie.

1. Donner l'équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement de C en t, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près.
2. Tracer la droite $\mathscr{D}$ sur le graphique fourni en annexe 2, page 6 à rendre avec la copie.
3. Avec le réglage donné de la machine, si l'on se réfère à cet ajustement, donner, par la méthode de votre choix, le taux d'humidité du bois utilisé pour obtenir la cote attendue (c'est-à-dire 15 mm).

Partie B

Dans cette usine, on maintient dorénavant le taux d'humidité du bois à une valeur constante. Les pièces en bois sont fabriquées en grande série dans deux ateliers SUD et NORD.
L'atelier SUD produit 100 pièces par jour et l'atelier NORD produit 400 pièces par jour.

Après fabrication, on constate que 2 % des pièces produites par l'atelier SUD et 3 % de celles de l'atelier NORD présentent un défaut de finition.
À la fin de la journée, on choisit au hasard une pièce dans la production totale de la journée.

Calculer la probabilité que cette pièce ne présente aucun défaut de finition.

Partie C

On s'intéresse, dans cette partie, aux pièces fabriquées qui n'ont aucun défaut de finition.
On admet que la variable aléatoire qui donne la cote C des pièces suit une loi normale de moyenne 15 et d'écart type σ.
Une pièce est acceptée si sa cote se situe dans l'intervalle $[14,9\ ;\ 15,1]$.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit acceptée, lorsque $\sigma = 0,05$?

2. Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité qu'une pièce soit refusée soit égale à 0,002.

Partie D

Les responsables de l'usine souhaitent contrôler, à l'aide d'un test bilatéral au seuil de risque de 5 %, que la cote moyenne de l'ensemble des pièces de la production de l'usine est bien égale à 15 mm.
Pour cela, ils projettent de réaliser un tirage d'un échantillon de 50 pièces de la production.
On admet pour la suite que les tirages d'un tel échantillon sont des tirages avec remise.

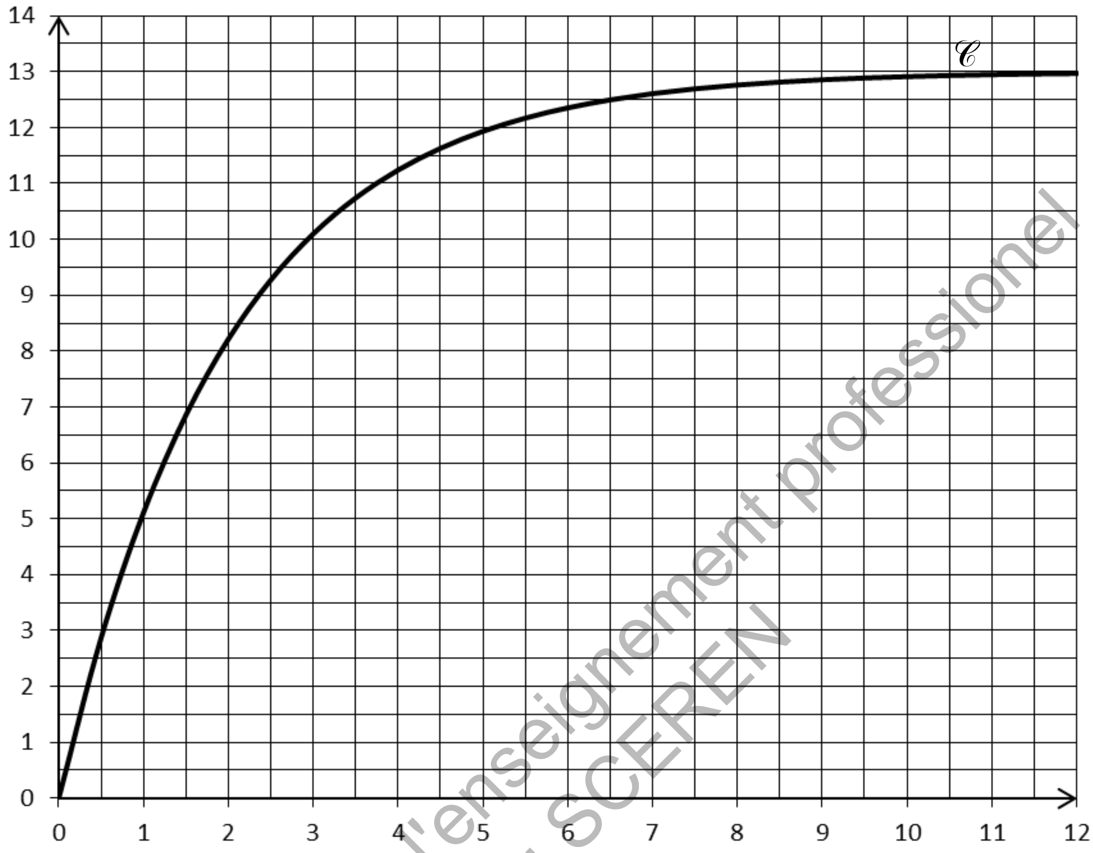
1. Donner l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1 qui seront utilisées pour ce test.

On appelle $\overline{C}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 pièces, associe la cote moyenne des pièces de l'échantillon.
On admet que, sous l'hypothèse nulle, $\overline{C}$ suit la loi normale de moyenne 15 et d'écart type 0,02.

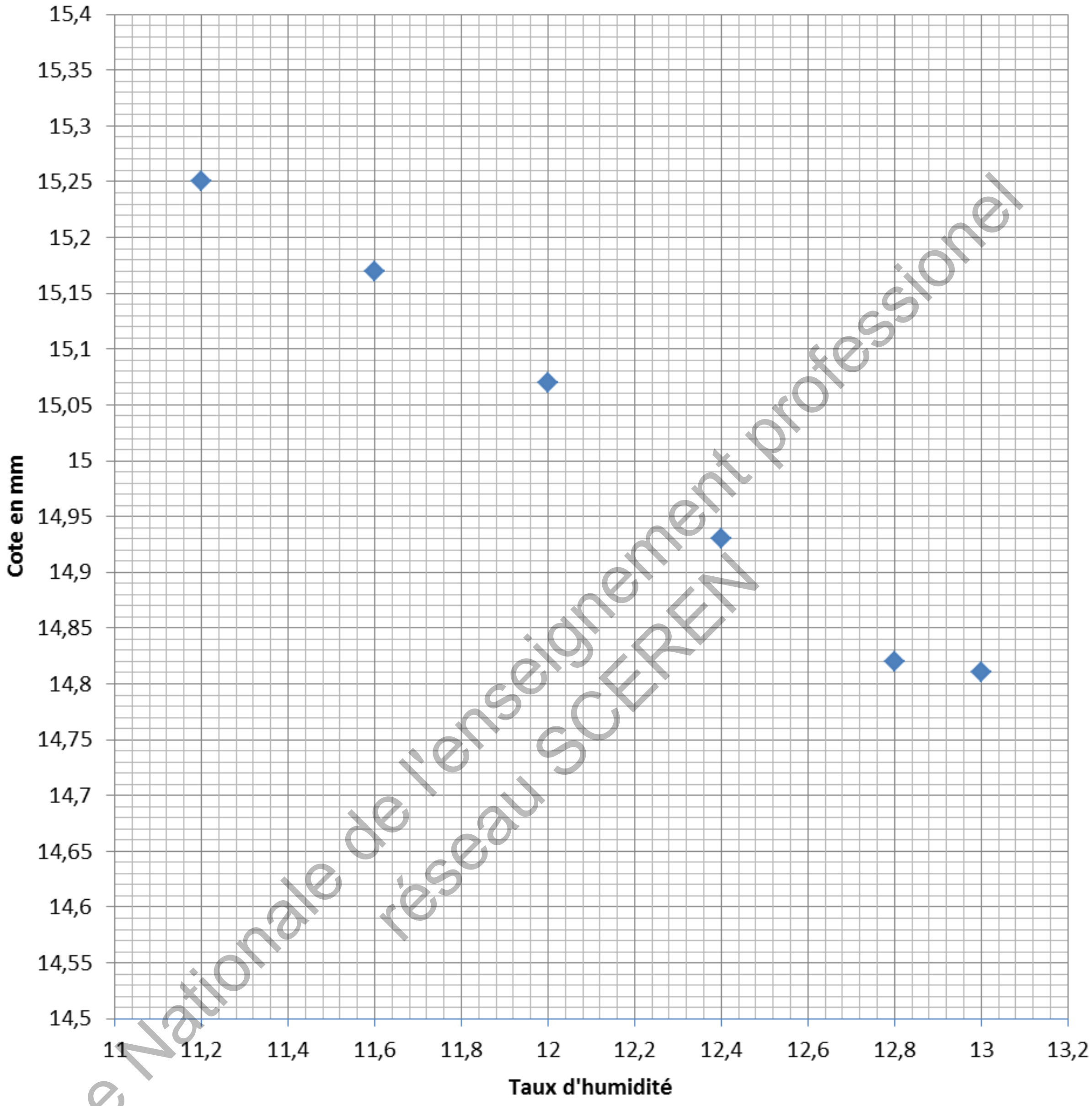
2. a) Déterminer le réel h tel que $P(15 - h \leq \overline{C} \leq 15 + h) = 0,95$.
   b) Énoncer la règle de décision du test.

3. Les responsables disposent, pour ce test, d'un échantillon de 50 pièces. La cote moyenne des pièces de cet échantillon est 15,02.
   Au vu de cet échantillon, peuvent-ils considérer que la cote moyenne de l'ensemble des pièces de la production est égale à 15 mm ?

ANNEXE 1, À RENDRE AVEC LA COPIE



ANNEXE 2, À RENDRE AVEC LA COPIE



FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

B.T.S. DU GROUPEMENT C

AGROÉQUIPEMENT

CHARPENTE-COUVERTURE

COMMUNICATION ET INDUSTRIES GRAPHIQUES

CONCEPTION ET RÉALISATION EN CHAUDRONNERIE INDUSTRIELLE

DÉVELOPPEMENT ET RÉALISATION BOIS

ÉTUDE ET RÉALISATION D'OUTILLAGES DE MISE EN FORME DES MATÉRIAUX

FONDERIE

INDUSTRIES CÉRAMIQUES

INDUSTRIES DES MATÉRIAUX SOUPLES (2 Options)

INDUSTRIES PAPETIÈRES (2 Options)

MISE EN FORME DES MATÉRIAUX PAR FORGEAGE

PRODUCTIQUE TEXTILE (4 Options)

SYSTÈMES CONSTRUCTIFS BOIS ET HABITAT

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\operatorname{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\operatorname{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$		
$\sin t$	$\cos t$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	$a e^{at}$
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(ku)' = ku'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$
$$(e^u)' = e^u u'$$
$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \ u \text{ à valeurs strictement positives}$$
$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$
$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$
$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Équations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

3. *PROBABILITES*

a) **Loi binomiale** $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X)=np$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) **Loi exponentielle**

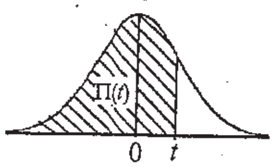
Fonction de fiabilité : $R(t)=e^{-\lambda t}$ $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$