BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2012

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B **CODE : MATGRB2**

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉ	COEFFICIENT
Conception et industrialisation en microtechniques	**1,5**

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.
Un formulaire de 5 pages est joint au sujet.

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999. La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (12 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = -5\,e^{-2x}$,
où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1° Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 2y = 0$.

2° Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5x\,e^{-2x}$. Démontrer que la fonction g est une solution de (E).

3° En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-5x)\,e^{-2x}$. On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1° a) On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x\,e^{-2x} = 0$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
La courbe C admet une asymptote en $+\infty$ dont une équation est :

$y = 1-5x$	$y = 0$	$x = 0$

2° a) À l'aide du développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \mapsto e^{t}$, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction : $x \mapsto e^{-2x}$.

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 1 - 7x + 12x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

d) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe C est au-dessus de la droite T. Recopier sur la copie la justification qui vous paraît exacte.

$12\,x^2$ est positif au voisinage de 0.	$x^2\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0.	$1-7x$ est positif au voisinage de 0.

C. Calcul intégral

1° On note $I = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction définie dans la partie *B*.

a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = \dfrac{23\mathrm{e}^{-4} - 13\mathrm{e}^{-2}}{4}$.

b) Donner la valeur approchée de I, arrondie à 10^{-2}.

2° a) Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ pour x dans l'intervalle [1, 2].

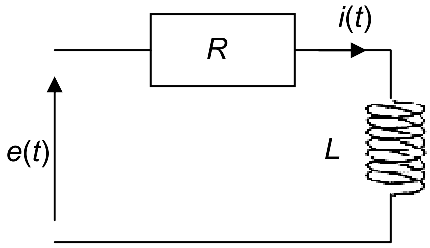
b) Interpréter graphiquement le nombre I.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.

EXERCICE 2 (8 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère le circuit représenté ci-dessous alimenté à tout instant t par une tension $e(t)$. On note $i(t)$ l'intensité du courant.



L'équation différentielle régissant ce circuit s'écrit :

$$L\, i'(t) + R\, i(t) = e(t)$$

où la fonction inconnue i, de la variable t, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et i' est la fonction dérivée de i.
On se place dans le cas où $R = 5\ \Omega$ et $L = 1$ H de sorte que l'équation différentielle précédente devient :

$$(1) : \quad i'(t) + 5\, i(t) = e(t),$$

avec $i(0^+) = 0$.
On suppose que la tension e est donnée par :

$$e(t) = \begin{cases} 10 \text{ si } 0 \leq t < 2 \\ 0 \text{ si } t < 0 \text{ ou } t \geq 2 \end{cases}.$$

A. Étude de la tension d'entrée

1° Sur une feuille de papier millimétré, tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de e sur l'intervalle $[0, 5]$. On prendra comme unité 2 cm pour l'axe des abscisses et 0,5 cm pour l'axe des ordonnées.

2° On désigne par $\mathcal{U}$ la fonction échelon unité définie par $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geq 0$.
Montrer que pour tout nombre réel t, on a $e(t) = 10\,[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2)]$.

B. Transformation de Laplace

En utilisant la transformée de Laplace, on se propose de déterminer l'intensité i du courant.
On admet que i, i' et e admettent des transformées de Laplace.
On note $E(p) = \mathcal{L}(e(t))$ et $I(p) = \mathcal{L}(i(t))$.

1° Déterminer $E(p)$.

2° a) En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (1), montrer, sachant que $i(0^+) = 0$, que $I(p) = 10\,\dfrac{1 - e^{-2p}}{p(p+5)}$.

b) Montrer que $I(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$I(p) = 2\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+5} - \frac{e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p+5}\right].$$

3° a) Déterminer les originaux $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\right)$; $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p+5}\right)$; $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{-2p}}{p}\right)$ et $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{-2p}}{p+5}\right)$.

b) En déduire l'intensité $i(t) = \mathcal{L}^{-1}(I(p))$.

C. Étude de la tension de sortie

On note u la tension de sortie aux bornes de la résistance. On admet que, pour tout réel t, $u(t) = R\, i(t)$. On a ainsi :

$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 10\left(1 - e^{-5t}\right) \text{ si } 0 \leq t < 2 \\ 10\, e^{-5t}\left(e^{10} - 1\right) \text{ si } t \geq 2 \end{cases}.$$

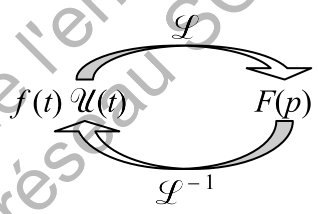
On fournit le tableau de valeurs suivant, où $u(t)$ est arrondi au centième.

t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	2,1	2,25	2,5	3	5
$u(t)$	0	7,13	9,18	9,76	9,93	9,99	10	6,06	2,86	0,82	0,07	0

1° Sur le graphique de la partie *A*, représenter u sur l'intervalle [0, 5].

2° Déterminer à l'aide du graphique, la plus petite valeur t_0 de t telle que $t \geq 2$ et $u(t) \leq 5$. Laisser apparents sur la figure les tracés utilisés.

Formulaire



On rappelle les formules suivantes sur la transformation de Laplace.

$$\mathcal{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathcal{L}[f] + \mu \mathcal{L}[g].$$

$$\mathcal{L}[\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p}.$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p+a}.$$

Plus généralement, si on note $\mathcal{L}[f(t)\mathcal{U}(t)] = F(p)$ alors,

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)] = F(p)\, e^{-\tau p};$$

$$\mathcal{L}[f(t)\, e^{-at}\mathcal{U}(t)] = F(p+a);$$

$$\mathcal{L}[f'(t)\mathcal{U}(t)] = p F(p) - f(0^+).$$