Session 2012

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

« COMPTABILITÉ ET GESTION DES ORGANISATIONS »

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

Coefficient : 2

<u>Matériel et documents autorisés</u> :

**L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

**Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 4 pages, numérotées de 1 à 4
(la page 4/4 est à rendre avec la copie).**

**Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.**

Exercice 1 (10 points)

Les parties A, B et C de cet exercice sont indépendantes.

A. Probabilités conditionnelles.

Un garagiste a acheté 70 % de son stock de pneus à un premier fournisseur et 30 % à un deuxième fournisseur.

Il observe que :

- 5 % des pneus provenant du premier fournisseur ont un défaut,
- 10 % des pneus provenant du deuxième fournisseur ont un défaut.

On prélève au hasard un pneu dans le stock. Tous les pneus ont la même probabilité d'être prélevés.

On considère les événements suivants :

F : « le pneu provient du premier fournisseur » ;
G: « le pneu provient du deuxième fournisseur » ;
D: « le pneu a un défaut ».

1) Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(F)$, $P(G)$, $P_F(D)$ et $P_G(D)$.

2) a) Calculer les valeurs exactes des probabilités $P(F \cap D)$ et $P(G \cap D)$.

   b) Déduire de ce qui précède que $P(D) = 0,065$.

3) Calculer la probabilité que le pneu provienne du deuxième fournisseur sachant que le pneu choisi a un défaut. Arrondir à 10^{-4}.

B. Loi binomiale.

Le garagiste choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus. On rappelle que la probabilité pour qu'un pneu pris au hasard ait un défaut est 0,065.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de dix pneus, associe le nombre de pneus de ce prélèvement qui présentent un défaut.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2) Calculer la probabilité qu'aucun pneu de ce prélèvement n'ait un défaut. Arrondir à 10^{-4}.
3) Calculer la probabilité qu'au plus deux des pneus choisis présentent un défaut. Arrondir à 10^{-4}.

C. Approximation d’une loi binomiale par une loi normale.

En janvier le garagiste décide de lancer une campagne promotionnelle sur les pneus. Pour cela, il envoie un courrier à 400 personnes prélevées au hasard dans sa banque de données de clients potentiels.

On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 400 personnes.

La probabilité pour qu'une personne, ayant reçu le courrier, vienne changer les pneus de son automobile chez ce garagiste est égale à 0,2.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 400 personnes (auxquelles le garagiste a envoyé un courrier) associe le nombre de personnes venues changer les pneus de son automobile chez ce garagiste.

On admet que Y suit la loi binomiale de paramètres 400 et 0,2.

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de paramètres $m = 80$ et $\sigma = 8$.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres 80 et 8.

1) Justifier les valeurs de m et σ.
2) Calculer $P(Z \leq 92,5)$.
3) Calculer la probabilité que cette campagne promotionnelle ait amené au moins 100 clients c'est à dire calculer $P(Z \geq 99,5)$.

Exercice 2 (10 points)

A. Statistiques

Le tableau suivant donne la consommation de tabac en grammes par personne de 15 ans ou plus et par jour.

Année	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Consommation de tabac (en grammes)	4,67	4,65	4,59	4,47	4,47	4,3	3,77	3,15	3,1	3,11	3,03	2,95	2,98

Source : Insee ; institut Gustave Roussy

Dans le plan muni d'un repère orthogonal on a représenté en annexe le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;y_i)$ pour i entier variant de 0 à 12.

1) Déterminer à l'aide d'une calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\,;y_i)$. Arrondir à 10^{-3}.

2) a) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression D de y en x, par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont à arrondir à 10^{-4}.

b) Tracer la droite D sur la figure de l'**annexe à rendre avec la copie**.

B. Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $[0,12]$ par $f(x) = 4,65 - 0,024x - \dfrac{1,4e^{2x}}{e^{2x} + 160000}$, C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal et f' sa fonction dérivée.

1) a) Démontrer que $f'(x) = -0,024 - \dfrac{448000e^{2x}}{(e^{2x} + 160000)^2}$ pour tout x de $[0,12]$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[0,12]$ et établir le tableau de variation de f.

2) a) Compléter le tableau de l'**annexe à rendre avec la copie** dans lequel les valeurs sont à arrondir à 10^{-2}.

b) Construire la courbe C sur la figure de la partie A.

3) Laquelle de la droite D et la courbe C semble le mieux ajuster le nuage de points ? Justifier.

C. Calcul intégral et application

1) Soit F la fonction définie sur $[0,12]$ par $F(x) = 4,65x - 0,012x^2 - 0,7\ln\left(e^{2x} + 160000\right)$.

Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur $[0,12]$.

2) a) Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[0,12]$ est: $V_m = 4,506 + \dfrac{7}{120}\ln\left(\dfrac{160001}{e^{24} + 160000}\right)$.

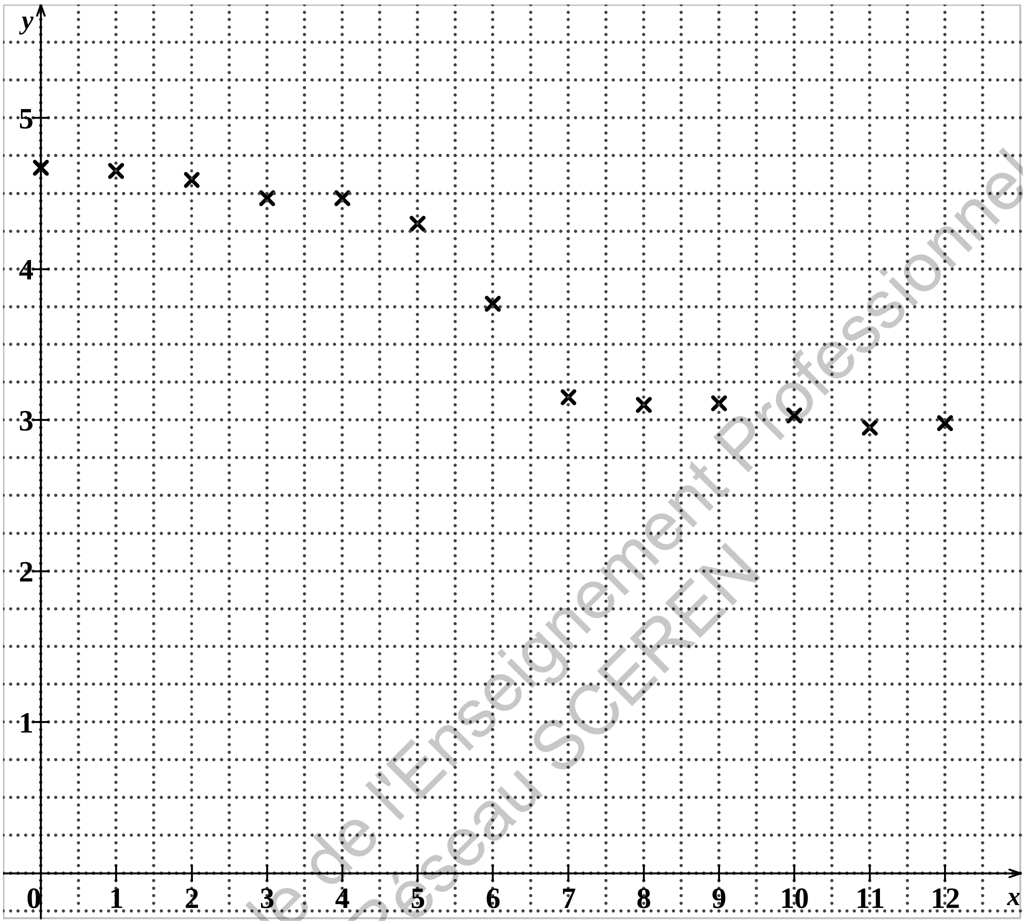
b) Donner la valeur approchée, arrondie à 10^{-1}, de V_m.

3) On admet que $f(x)$ représente la consommation de tabac, par jour, en grammes d'une personne de 15 ans ou plus. Donner une interprétation du résultat obtenu à la question précédente.

Annexe (à rendre avec la copie)

Exercice 2

A.



B. 2) a)

x	0	2	4	5	6	7	8	10	12
$f(x)$				4,36					

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS COMPTABILITE ET GESTION DES ORGANISATIONS

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES :*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$	$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$
$(ku)' = ku'$	$(e^u)' = e^u u'$
$(uv)' = u'v + uv'$	
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur [a , b] :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

3. *PROBABILITES :*

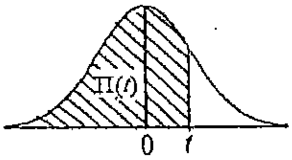
a) Loi binomiale $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) <u>Loi normale</u>

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994,5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$

CGMAT