



SERVICES CULTURE ÉDITIONS
RESSOURCES POUR
L'ÉDUCATION NATIONALE

**Ce document a été numérisé par le CRDP de Bordeaux pour la
Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel.**

Campagne 2013

**BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS**

Session 2013

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Coefficient : 2

SUJET

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6.

L'annexe page 6 est à rendre avec la copie.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

**La clarté du raisonnement, la présentation et la qualité de la rédaction
interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

*Le sujet comporte 3 exercices indépendants
qui seront traités sur des copies séparées.*

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		
Session 2013	Mathématiques	CPMAT
Coefficient : 2	Durée : 3 heures	6 pages

Exercice 1 (3 points)

Les quatre questions suivantes sont indépendantes. Pour les questions 2 et 4, toute trace de recherche, même non aboutie, sera valorisée.

1. Dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(-2; 4; 1)$, $B(3, 5, -1)$ et $C(0; 3; 4)$. Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre G des points A , B et C .
2. Dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(1; 3; 2)$, $B(0; 5; -2)$ et $C(a; 2; 2)$ où a est un nombre réel. Déterminer la valeur de a pour que le triangle ABC soit rectangle en A . On pourra utiliser le produit scalaire.
3. Soient les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel.
Déterminer a pour que le produit AB soit égal à $AB = \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$.
4. Soient les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ où a , b et c sont des nombres réels. Déterminer les valeurs de a , b et c pour que l'on ait l'égalité matricielle suivante : $A \times B = C$.

Exercice 2 (7 points)

Les deux parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 4y' + 5y = 10x + 3$$

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur \mathbf{R} , y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur \mathbf{R} de l'équation différentielle

$$(E_0) : y'' + 4y' + 5y = 0 .$$

2. Déterminer les constantes réelles a et b telles que la fonction g définie sur \mathbf{R} par $g(x) = ax + b$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -1$ et $f'(0) = 4$.

Partie B : étude locale d'une fonction

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = 2e^{-2x} \sin(x) + 2x - 1$.

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. (a) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \mapsto e^{-2x}$.
- (b) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \mapsto \sin x$.
- (c) En déduire le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto e^{-2x} \sin(x)$.
- (d) Finalement, montrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est

$$f(x) = -1 + 4x - 4x^2 + x^2 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

2. (a) Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
- (b) Étudier les positions relatives de C et de T au voisinage du point d'abscisse 0 et illustrer cette situation par un schéma.

Exercice 3 (10 points)

Soit m un réel strictement positif dont on ne connaît pas la valeur.

On considère les points $P_0(0;0)$, $P_1(1;m)$ et $P_2(3;0)$ dans un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées. On remarque que P_0 est égal à O , origine du repère.

On considère la courbe de Bézier définie par les points de définition P_0, P_1, P_2 . Soit t un réel variant entre 0 et 1.

On pose $B_{0,2}(t) = (1-t)^2$, $B_{1,2}(t) = 2t(1-t)$ et $B_{2,2}(t) = t^2$.

On rappelle que la courbe de Bézier définie par trois points de définition P_0, P_1, P_2 est décrite par le point $M(t)$ qui satisfait à l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(t) \overrightarrow{OP}_i.$$

Comme m est variable on a une famille de courbes de Bézier de paramètre m .

On note Γ_m la courbe de Bézier associée au paramètre m .

Partie A : travail graphique

1. On prend $m = 8$. Placer les points P_0, P_1 et P_2 sur le graphique de l'annexe page 6 à rendre avec la copie.
2. Quels sont les éléments géométriques que vous pouvez déjà donner pour la construction de la courbe de Bézier définie par ces trois points de contrôle ?
3. Construire graphiquement (par la méthode des barycentres ou par toute autre méthode) le point $M(\frac{1}{2})$ de cette courbe.
4. À l'aide des questions 2) et 3) tracer l'allure de Γ_8 , la courbe de Bézier correspondant à $m = 8$.
5. On prend maintenant $m = 1,5$. Placer, sur le même graphique, les nouveaux points P_1 et $M(\frac{1}{2})$ correspondant à cette valeur de m .
6. Tracer l'allure de $\Gamma_{1,5}$.

Partie B : travail numérique

Soit le point $A(1;2)$. On se demande s'il existe une courbe de la famille de courbes Γ_m qui passe par le point A .

1. Placer le point A sur le graphique. Au vu des deux courbes tracées dans la partie A, que peut-on supposer sur la valeur de m ?
2. Démontrer que les coordonnées de $M(t)$ parcourant Γ_m sont :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t \\ y(t) = m \times 2t(1-t) \end{cases}$$

On remarque que l'ordonnée de $M(t)$ dépend de t et de m .

3. Justifier que l'on est conduit à résoudre le système de deux équations à deux inconnues t et m suivant :

$$\begin{cases} t^2 + 2t - 1 = 0 & (1) \\ 2mt(1-t) = 2 & (2) \end{cases}$$

4. On calcule d'abord les valeurs de t possibles. Pour cela, résoudre l'équation (1) pour t variant dans $[0; 1]$. En déduire qu'il existe une unique solution t_0 dont on donnera la valeur exacte.
5. Remplacer t par t_0 dans l'équation (2). En déduire qu'il existe une seule valeur de m possible que l'on notera m_0 . En déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près.
6. Y a-t-il une courbe de la famille Γ_m qui passe par le point A ? Si oui, laquelle ?

Partie C : vérification

Pour la suite de l'exercice, on choisit pour m la valeur $m_0 = 4,12$.

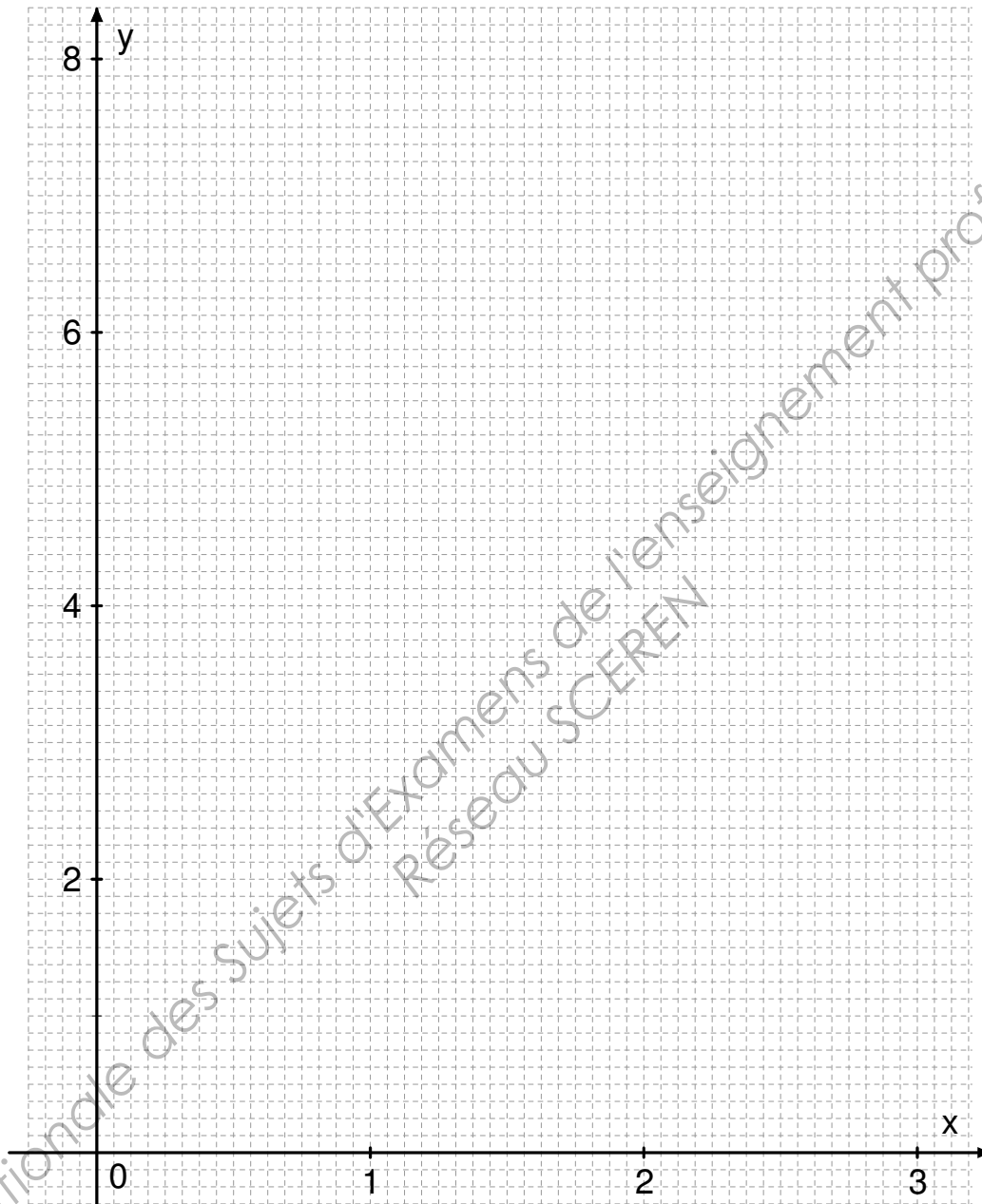
On considère la courbe de Bézier Γ_{m_0} .

1. Un tableau de valeurs $(t, x(t), y(t))$, établi pour la valeur $m = m_0$, est proposé en **annexe page 6 à rendre avec la copie**. Compléter ce tableau à l'aide de la calculatrice. Donner les résultats arrondis à 10^{-2} .

On ne demande pas d'étudier les variations conjointes de $x(t)$ et $y(t)$.

2. Tracer Γ_{m_0} avec soin sur le graphique de l'**annexe page 6 à rendre avec la copie**.

Annexe 1 à rendre avec la copie



t	0	0,1	0,2	0,3	0,414	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$x(t)$	0		0,44			1,25					
$y(t)$	0		1,32			2,06					

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \text{où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \quad \text{où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \quad \text{où } t > 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

$$e^{at} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \quad \text{où } a = \alpha + i\beta$$

2. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \ln t = 0$$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	Arc sin t	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	Arc tan t	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \quad (\alpha \in \mathbf{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{\alpha t} \quad (\alpha \in \mathbf{C})$	$\alpha e^{\alpha t}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Équations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda + \mu)t e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.