BREVET TECHNICIEN SUPÉRIEUR

CHIMISTE

SESSION 2013

Mathématiques

Durée : 2 heures
Coefficient : 3

__Matériel autorisé__ :
Sont autorisées toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimantes. (circulaire n° 99-186 du 16/11/1999).

Tout autre matériel est interdit.

Aucun document autorisé.

__**Documents à rendre avec la copie :**__
- Annexe page 6

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6 et
le formulaire de mathématiques numéroté 1 à 4 (agrafé avec le sujet).

EXERCICE 1 (9 points)

On considère deux réactions successives : $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$

k_1 et k_2 désignent des constantes de vitesse réelles distinctes, strictement positives et vérifient $k_1 < k_2$.

A l'instant t (exprimé en minutes), on désigne par $x(t)$ et $y(t)$ les concentrations exprimées en $mol.L^{-1}$ respectivement des produits A et B. On admettra que x et y sont des fonctions de variable t définies et dérivables sur l'intervalle $[0;+\infty[$

Les lois cinétiques donnent les équations suivantes :

$$\begin{cases} x' = -k_1 x & (1) \\ y' = -k_2 y + k_1 x & (2) \end{cases}$$

avec les conditions initiales : $x(0) = a$, $y(0) = 0$ où a est une constante strictement positive.

Partie I : Résolution du système

1. Résoudre l'équation (1). En tenant compte de la condition initiale, en déduire l'expression $x(t)$.

2. Montrer que l'équation (2) peut s'écrire sous la forme :

(E) $y' + k_2 y = k_1 a e^{-k_1 t}$

3. a) Déterminer le réel α tel que la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(t) = \alpha a e^{-k_1 t}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

b) Donner la solution générale de l'équation différentielle (E).

4. Montrer que la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales est la fonction y définie, pour $t \geq 0$, par :

$$y(t) = \frac{k_1}{k_2 - k_1} a(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

Partie II: Etude de fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(t) = a(e^{-0,5t} - e^{-t})$

1. Calculer, en justifiant, la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

2. a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

b) En déduire que la fonction f admet un maximum en $t_0 = 2\ln 2$.

c) Montrer que, l'expression exacte du maximum de f est $\frac{a}{4}$.

Partie III : Détermination des différentes concentrations

Dans cette partie, les constantes de vitesse k_1 et k_2 ont été choisies de telles sortes que la concentration du produit B soit représentée par la fonction f étudiée dans la **partie II** et la concentration du produit A, par une fonction h. Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ données en annexe dans un repère orthogonal sont les représentations graphiques respectives des fonctions f et h. (unités graphiques: 2 cm pour 1 minute sur l'axe des abscisses et 1cm pour 0,01 mol.L^{-1} sur l'axe des ordonnées.)

1. En utilisant la courbe $\mathscr{C}_1$, déterminer la valeur de la concentration initiale du produit A notée a et exprimée en mol.L^{-1}. On laissera apparent les traits de construction.

2. On désigne par $z(t)$ la concentration en mol.L^{-1} à l'instant t du produit C (t exprimé en minutes). En utilisant le tracé de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{C}_2$ et sachant qu'à tout instant on a $f(t)+h(t)+z(t)=0,2$, **tracer sur l'annexe (à rendre avec la copie)** les points de coordonnées $(t, z(t))$ pour $t=0$, $t=2\ln 2$ et $t=3$.

EXERCICE 2 (11 points)

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Une usine fabrique, en grande quantité, des plaques de mousse en polyuréthane utilisées pour le garnissage automobile. On étudie leur densité exprimée en kilogramme par mètre cube (kg.m^{-3}).
Dans cet exercice, sauf indication contraire, **les résultats seront donnés à** 10^{-2} **près**.

Partie I

Une plaque de mousse est conforme, pour la densité, lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[41,6\ ;\ 42,4]$.

1. On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque plaque de mousse prélevée au hasard dans la production, associe sa densité. On suppose que X_1 suit la loi normale de moyenne 42 et d´écart type $\sigma_1 = 0,17$.
Calculer la probabilité qu'une plaque de mousse prélevée au hasard dans la production soit conforme.
Remarque : *On n'effectuera pas d'interpolation linéaire lors de l'utilisation de la loi normale centrée réduite.*

2. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production de ses mousses : elle envisage de modifier le réglage des injecteurs de mousse.
On note D la variable aléatoire qui, à chaque plaque de mousse prélevée dans la production future, associera sa densité.
On suppose que la variable aléatoire D suit une loi normale de moyenne 42 et d´écart type σ_2.
Déterminer σ_2 pour que la probabilité qu'une plaque de mousse prélevée au hasard dans la production future soit conforme pour la densité, soit égale à 0,95.

Partie II

On note E l'évènement : "une plaque de mousse prélevée au hasard dans un stock important a une densité non conforme". On suppose que P(E) = 0,03 où P(E) désigne la probabilité de l'évènement E.

On prélève au hasard cinq plaques de mousse dans le stock pour vérification de leur densité. Le stock de plaques de mousse est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On considère la variable aléatoire Y_1 qui à tout prélèvement de cinq plaques de mousse associe le nombre de plaques de mousse de ce prélèvement ayant une densité non conforme.

1. Justifier que la variable aléatoire Y_1 suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus une plaque de mousse ait une densité non conforme. On donnera les résultats à 10^{-3} près.

Partie III

Les plaques de mousse sont commercialisées par lots de 1000.
On prélève au hasard un lot de 1000 plaques de mousse dans un dépôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1000 plaques.
On considère la variable aléatoire Y_2 qui, à tout prélèvement de 1000 plaques, associe le nombre de plaques de mousse ayant une densité non conforme.
On admet que la variable aléatoire Y_2 suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0{,}03$.
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y_2 par une loi normale.

1. On note Z la variable aléatoire suivant cette loi normale.

Justifier que les paramètres de cette loi normale sont 30 et 5,39.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 25 plaques non conformes dans le lot de 1000 plaques, c'est-à-dire calculer $P(Z < 25{,}5)$.

Partie IV

On se propose de construire un test d'hypothèse unilatéral pour contrôler la densité, exprimée en kilogramme par mètre cube ($kg.m^{-3}$), des plaques de mousse constituant la commande d'un client. Le client doit pouvoir refuser une commande si la densité d des plaques de mousse est trop faible.

Le fournisseur affirme que la densité d des plaques de mousse commercialisées est supérieure ou égale à 42 $kg.m^{-3}$.

Le seuil de risque α du test est fixé à $\alpha = 0{,}05$.
L'hypothèse nulle est $H_0 : d = 42$.
Un échantillon de $n = 100$ plaques est prélevé.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque plaque de mousse prélevée au hasard dans la livraison, associe sa densité.
La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne inconnue d et d'écart type $\sigma = 0,17$.

On désigne par $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 plaques de mousse prélevée dans la livraison, associe la moyenne des densités de ces plaques (la livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

1. Souhaitant contrôler sa livraison, un client prélève un échantillon de 100 plaques et mesure la densité de chaque plaque. Les résultats obtenus sont placés dans le tableau suivant :

Classes	[41,60 ;41,70[	[41,70 ;41,80[	[41,80 ;41,90[	[41,90 ;42,00[	[42,00 ;42,10[	[42,10 ;42,20[	[42,20 ;42,30[
Effectifs	8	5	23	30	12	16	6

En supposant que dans chaque classe tous les éléments sont situés au centre, calculer la moyenne des mesures de cet échantillon. On donnera le résultat à 10^{-2} près.

2. Préciser l'hypothèse alternative notée H_1.

3. Justifiez que, sous l'hypothèse H_0, la loi suivie par la variable aléatoire $\overline{X}$ est la loi normale de moyenne 42 et d'écart-type 0,017.

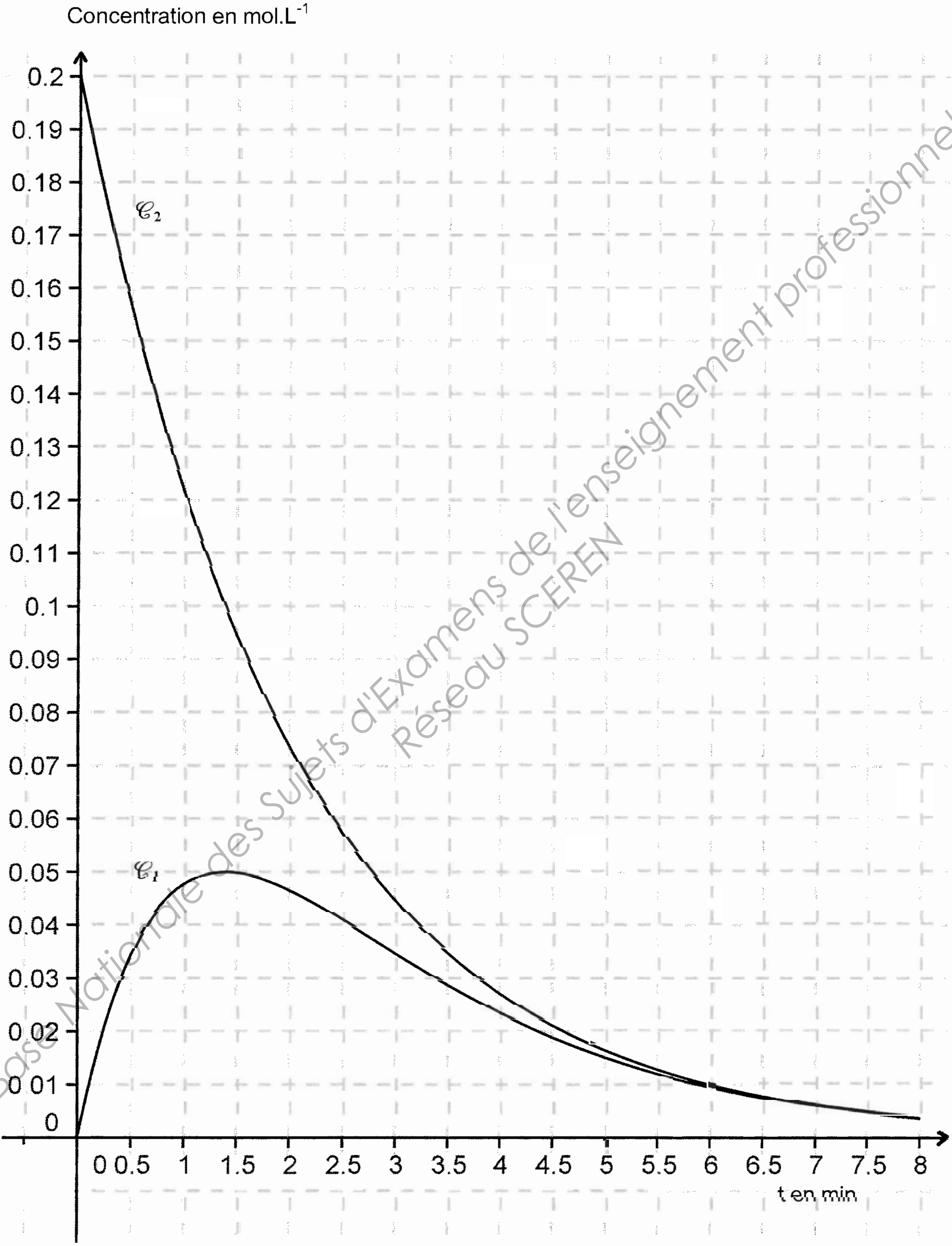
4. Déterminer, à 10^{-3} près, sous l'hypothèse H_0, le nombre réel positif h tel que :

$$P(42 - h < \overline{X}) = 0,95.$$

5. Enoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

6. Peut-on, en appliquant le test à l'échantillon de la question 1, au risque de 5%, conclure que la livraison est conforme pour la densité ?

Annexe à rendre avec la copie



FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS CHIMISTE

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \dfrac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \dfrac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\operatorname{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\operatorname{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
t^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	e^{at} $(a \in \mathbb{C})$	$a e^{at}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$\left(e^u\right)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

d) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = k e^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

3. *PROBABILITES*

a) **Loi binomiale** $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X)=np$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) **Loi exponentielle**

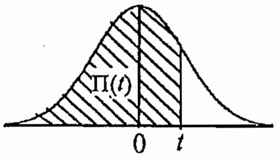
Fonction de fiabilité : $R(t)=e^{-\lambda t}$ $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$