BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2013

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B **_CODE : MATGRB2_**

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉ	COEFFICIENT
Conception et industrialisation en microtechniques	**1,5**

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.
Un formulaire de 3 pages est joint au sujet.

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (12 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans cet exercice, on étudie des fonctions intervenant dans les prévisions sur la vitesse moyenne du vent pour l'implantation d'éoliennes.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + (0{,}25\,x)\,y = 0{,}25\,x$
où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1° Déterminer les solutions définies sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + (0{,}25\,x)\,y = 0.$$

2° Vérifier que la fonction constante h, définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = 1$, est une solution de l'équation différentielle (E).

3° En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $F(0) = 0$.
***Remarque : la fonction F* intervient dans la partie *C* de cet exercice.**

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (0{,}25\,x)\ \mathrm{e}^{-0{,}125\,x^2}$.
***Remarque : la fonction f* n'est pas une solution de l'équation différentielle (*E*).**

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère $(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

1° *Les questions a) et b) suivantes sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est égal à :

$+\infty$	$-\infty$	0

b) En $+\infty$ la courbe C admet une asymptote d'équation :

$y = -0{,}125\,x^2$	$y = 0$	$x = 0$

2° a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0, +\infty[$,

$$f'(x) = 0{,}0625\,(2 + x)(2 - x)\ e^{-0{,}125\,x^2}.$$

b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3° Un logiciel de calcul formel fournit le développement limité de la fonction f, à l'ordre 3, au voisinage de zéro : $f(x) = 0{,}25\,x - 0{,}031\,25\,x^3 + x^3\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Ce résultat est admis et n'est donc pas à démontrer.

a) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b) Étudier la position relative de T et de C au voisinage du point d'abscisse 0, pour x positif.

C. Application à l'étude de la vitesse du vent

1° Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = 1 - e^{-0{,}125\,x^2}$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

b) Démontrer que F est une primitive sur $[0, +\infty[$ de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = (0{,}25\,x)\ e^{-0{,}125\,x^2}.$$

2° Calculer $I = \int_1^6 f(x)\,dx$. Donner la valeur approchée du résultat arrondie à 10^{-2}.

Le résultat précédent donne la probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse moyenne du vent soit comprise entre 1 m/s et 6 m/s.

EXERCICE 2 (8 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Étude d'un signal

On considère la fonction f, périodique de période $T = 4$, définie par :

$$f(x) = 2 \text{ si } x \in [0, 3[\;;$$
$$f(x) = 0 \text{ si } x \in [3, 4[.$$

1° a) Déterminer $f(1)$, $f(3{,}2)$ puis $f(3)$.

b) Tracer la représentation graphique de la fonction f, pour x variant dans l'intervalle $[-4, 8[$, dans un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

2° *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

Si $x \in [13, 14[$, $f(x) = 0$	Si $x \in [14, 15[$, $f(x) = 2$	Si $x \in [15, 16[$, $f(x) = 2$

3° On note ω la pulsation associée à la fonction f. Justifier que $\omega = \dfrac{\pi}{2}$.

B. Calcul des coefficients de Fourier a_n du signal

On note a_n et b_n les coefficients de Fourier de la fonction f.

1° Vérifier que $a_0 = \dfrac{3}{2}$.

2° a) Soit n un entier supérieur ou égal à 1, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^3 \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right) \mathrm{d}t$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{2}{n\pi}\sin\left(\dfrac{3n\pi}{2}\right)$.

c) En déduire les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

C. Application à la valeur efficace

1° On admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{2}{n\pi}\sin\left(\dfrac{3n\pi}{2}\right)$ et $b_n = \dfrac{2}{n\pi}\left(1-\cos\left(\dfrac{3n\pi}{2}\right)\right)$.

Recopier et compléter le tableau suivant avec des valeurs approchées arrondies à 0,001.

n	0	1	2	3
a_n	1,5			
b_n				

2° On note f_e la valeur efficace de la fonction f et on admet que $f_e^2 = 3$.

Soit P le nombre défini par : $P = a_0^2 + \dfrac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2)$.

On veut vérifier que le nombre P est une approximation de f_e^2.

a) En utilisant les nombres du tableau de la question 1°, calculer le nombre P. Donner la valeur approchée de P arrondie à 0,01.

b) On appelle erreur relative de l'approximation le nombre $\dfrac{3-P}{3}$.

Vérifier que $\dfrac{3-P}{3} < 0{,}04$.

Formulaire pour les séries de Fourier

f : fonction périodique de période T.
Développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ik\omega t}, \quad (n \in \mathbf{N}^*,\ k \in \mathbf{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,dt \ ; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \ ;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt.$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\, e^{-ik\omega t}\,dt \ (k \in \mathbf{Z}) \ ; \quad c_0 = a_0 \ ;$$

$$\frac{a_n - ib_n}{2} = c_n \ ; \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n} \ (n \in \mathbf{N}^*).$$

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

BTS

CONCEPTION ET INDUSTRIALISATION
EN MICROTECHNIQUES

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b,$ où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)\right)$, où $a = \alpha + i\beta$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\operatorname{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\operatorname{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at} \quad (a \in \mathbb{C})$	$a e^{at}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(k u)' = k u'$$

$$(uv)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) u'$$

$$\left(e^u\right)' = e^u u'$$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur [a , b] :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Équations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k e^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ … où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt}$ ….. où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = \left[\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)\right] e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.