Ce document a été numérisé par le Canopé de l'académie de Bordeaux
pour la Base nationale des sujets d'Examens de l'enseignement professionnel.

Ce fichier numérique ne peut être reproduit, représenté, adapté ou traduit sans autorisation.

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

BREVET TECHNICIEN SUPÉRIEUR

CHIMISTE

SESSION 2014

Mathématiques

Durée : 2 heures
Coefficient : 3

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

Matériel autorisé :
Sont autorisées toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimantes. (circulaire n° 99-186 du 16/11/1999).

Tout autre matériel est interdit.

Aucun document autorisé.

Documents à rendre avec la copie :
- Annexe page 6

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6 et
le formulaire de mathématiques numéroté 1 à 4 (agrafé avec le sujet).

EXERCICE 1 (11 points)

Soit la réaction chimique successive : A → B → C

On note $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ les concentrations en mole par litre des produits A, B et C à l'instant t exprimé en minute.

À l'instant $t = 0$, on a les concentrations initiales : $x(0)=\mathrm{a}$, $y(0)=0$ et $z(0)=0$ où a est un réel positif.

Les lois de la cinétique chimique montrent que x, y et z sont solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{k}\,x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathrm{k}\,x - y \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = y \end{cases}$$

où k désigne une constante réelle strictement positive et différente de 1.

Partie I : Résolution d'un système

L'étude conduit au système suivant : $\begin{cases} x' = -\mathrm{k}\,x & (1) \\ y' = \mathrm{k}\,x - y & (2) \\ z' = y & (3) \end{cases}$

1) Résoudre l'équation (1).
   En déduire $x(t)$ en tenant compte de la condition initiale $x(0)=\mathrm{a}$.

2) a) Montrer que l'équation (2) peut s'écrire sous la forme : $y' + y = \mathrm{k\,a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{k}t}$ (4) .

   b) Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.

   c) Déterminer le réel α tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{k}t}$ soit une solution particulière de l'équation (4).

   d) Sachant que $y(0)=0$, montrer que $y(t) = \dfrac{\mathrm{k\,a}}{1-\mathrm{k}}\,(\mathrm{e}^{-\mathrm{k}t} - \mathrm{e}^{-t})$.

3) Résoudre l'équation (3).
   En déduire $z(t)$ en tenant compte de la condition initiale $z(0)=0$.

Partie II : détermination expérimentale de la constante k

On a réalisé une expérience du type : A → B → C et on a obtenu les résultats suivants sur les concentrations du produit A :

t_i (en min)	0	1	2	3	4	5
x_i (en mol. L^{-1})	3	0,67	0,15	0,033	0,0073	0,0015

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

On pose $X = \ln x$

1) Recopier et compléter le tableau suivant en donnant les résultats arrondis à 10^{-3}.

t_i	0	1	2	3	4	5
$X_i = \ln x_i$						

2) a) Donner l'équation de la droite de régression de X en t, obtenue par la méthode des moindres carrés, sous la forme $X = \mathrm{m}\,t + \mathrm{p}$.
On donnera les valeurs de m et p arrondies à 10^{-2}.

b) En déduire une approximation de l'expression $x(t)$ sous la forme $\lambda e^{\mu t}$ où λ et μ sont des constantes.

c) Déduire du résultat de la modélisation obtenue à la question I.1), une valeur approchée de la constante k à 10^{-2} près.

Partie III

Dans cette partie, on admet que a = 3 et k = 1,5 .

On considère les fonctions x et y définies sur $[0; +\infty[$ par :

$x(t) = 3\,e^{-1{,}5t}$ et $y(t) = 9\,(e^{-t} - e^{-1{,}5\,t})$.

1) Calculer $y'(t)$ et vérifier que $y'(t)$ peut s'écrire sous la forme

$y'(t) = 9\,e^{-1{,}5\,t}(1{,}5 - e^{0{,}5\,t})$.

2) Établir que sur $[0;+\infty[$, la fonction y admet un maximum M que l'on déterminera à 10^{-2} près, ainsi que la valeur exacte de l'instant t_m tel que $y(t_m) = \mathrm{M}$.

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

EXERCICE 2 (9 points)

Les parties I et II sont indépendantes.

La feuille donnée en annexe sera rendue avec la copie.

Partie I : Plan d'expérience

En vue d'obtenir un rendement optimal en polyolester, on réalise un plan d'expériences portant sur trois facteurs : la température, la pression et le pourcentage massique de catalyseur utilisé.

Le rendement Y est modélisé par une expression de la forme :

$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \varepsilon$

On désigne par X_1 , X_2 et X_3 les niveaux respectifs de la température, de la pression et du pourcentage massique du catalyseur, avec – 1 pour le niveau bas et +1 pour le niveau haut.
Les facteurs varient de la façon suivante :

	niveau bas : -1	niveau haut : +1
Température en kelvin (K)	423	483
Pression en bar	0,1	0,5
% massique de catalyseur	0,5	1,5

Les 8 expériences réalisées ont donné les résultats suivants :

Expérience	1	2	3	4	5	6	7	8
Température	423	483	423	483	423	483	423	483
Pression	0,1	0,1	0,5	0,5	0,1	0,1	0,5	0,5
Masse de catalyseur	0,5	0,5	0,5	0,5	1,5	1,5	1,5	1,5
Rendement	0,75	0,55	0,6	0,8	0,7	0,55	0,45	0,8

1) Compléter le document donné en annexe en donnant les estimations ponctuelles des effets a_0, a_1, a_2, a_3 et l'expression du modèle Y.

2) En utilisant l'expression de Y, en déduire, pour chacun des facteurs, le niveau qui assure le meilleur rendement.

3) À l'aide de l'expression du modèle Y, justifier qu'avec une température de 453 K, une pression de 0,3 bar et un pourcentage massique de catalyseur de 1 %, le rendement sera égal à 0,65 .

4) Avec une pression de 0,1 bar ($X_2 = -1$) et 1 % de catalyseur ($X_3 = 0$), quelle devrait-être la valeur de X_1 pour avoir un rendement de 0,65 ?
À quelle température en kelvin cela correspond-il ?

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

Partie II

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-3} *.*

Le polyolester est conditionné dans des récipients. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque récipient associe le volume de son contenu exprimé en cm^3.

On suppose que X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ .

1) Dans cette question on prend $\mu = 500$, valeur annoncée par le fabricant.

Le récipient est conforme au cahier des charges si le volume de son contenu appartient à l'intervalle [495 ; 505] .

a) Calculer la probabilité qu'un récipient pris au hasard soit conforme quand $\sigma = 4$.

b) Quel devrait être la valeur de l'écart-type σ pour que la probabilité d'avoir un récipient conforme soit égale à 0,9 ?

2) Dans cette question, on suppose que $\sigma = 4$. Le fabricant affirme que $\mu = 500$.
On se propose de construire un test bilatéral permettant d'accepter ou de refuser cette hypothèse, avec un seuil de risque de 5%.

On prend pour hypothèse nulle H_0 : $\mu = 500$ et pour hypothèse alternative H_1 : $\mu \neq 500$.

a) Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 récipients prélevés au hasard, associe le volume moyen de leur contenu.
Vérifier que $\overline{X}$ suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma' = 0,4$.

b) Déterminer le réel h tel que, sous l'hypothèse H_0 : $P\ (\ 500 - h \leq \overline{X} \leq 500 + h\ )\ =\ 0,95$.

c) Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

d) Pour un échantillon de 100 récipients prélevés au hasard, le volume moyen des contenus est $\overline{x} = 500,6$.
Peut-on considérer, au risque 5 %, que $\mu = 500$?

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

Annexe à rendre avec la copie

Exercice N°2 - Partie I

expérience	moyenne	X_1	X_2	X_3	Y
1					0,75
2					0,55
3					0,6
4					0,8
5					0,7
6					0,55
7					0,45
8					0,8
effets	a_0	a_1	a_2	a_3	
estimation des effets	…………	…………	…………	…………	

Calcul des estimations des effets :

$a_0 \approx$ ………..

$a_1 \approx$ ………

$a_2 \approx$ ………

$a_3 \approx$ ………

Rendement Y $\approx$ ……..

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS CHIMISTE

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\operatorname{Arc\,sin} t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\operatorname{Arc\,tan} t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
t^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	e^{at} $(a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$\left(e^u\right)' = e^u u'$$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

d) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

3. *PROBABILITES*

a) **Loi binomiale** $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X)=np$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) **Loi exponentielle**

Fonction de fiabilité : $R(t)=e^{-\lambda t}$ $\quad E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\quad \sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

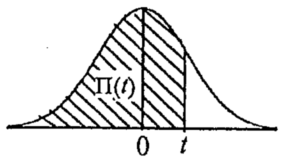
Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé