BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

AGENCEMENT DE L'ENVIRONNEMENT ARCHITECTURAL

Session 2014

U31 - MATHÉMATIQUES

Durée : 2 h - Coefficient 2

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.
Le sujet est composé de 4 pages numérotées de 2/9 à 5/9.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 4 pages, numérotées de 6/9 à 9/9.
Le document annexe (page 5/9) est à rendre avec la copie.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Exercice 1 (12 points)

On souhaite étudier le refroidissement du café servi par une machine initialement à une température de 70° C. On suppose que la température ambiante de la pièce dans laquelle se trouve le café est constante et égale à 20°C. La température (en °C) du café à l'instant t (en min) vaut $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$.

On modélise le problème par la loi de refroidissement, énoncée par Isaac Newton : « la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant », soit :

$$\theta' = k(\theta - \theta_o)$$

où θ est la température du corps étudié, θ' la vitesse de refroidissement, θ_0 la température ambiante et k une constante négative propre au corps étudié.

Dans l'exemple traité ici, on estime que la fonction f vérifie alors l'équation :

$$\text{(E)} : y' + 0{,}2\, y = 4$$

où y est une fonction de la variable réelle t et y'sa dérivée première.

On note f' la fonction dérivée de f. Elle correspond à la vitesse de refroidissement du café servi, en degrés par minute.

Partie A

1. Résoudre sur $[0; +\infty[$ l'équation différentielle $\mathrm{E}_0 : y' + 0{,}2\, y = 0$.
2. Trouver le réel a tel que la fonction constante $g(t) = a$ soit solution de l'équation E sur $[0; +\infty[$.
3. En déduire la solution générale de (E) sur $[0; +\infty[$.
4. Déterminer la fonction f sachant que la température initiale du café est de 70°.

Partie B

On admet que la fonction f, dont la courbe est représentée en annexe page 5, est définie pour tout $t \in [\ 0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = 20 + 50\mathrm{e}^{-0{,}2t}$$

Pour la suite de cet exercice, en cas de résolution par lecture graphique, on laissera sur le document annexe (page 5) une trace des traits de construction, et on explicitera la démarche.

1. Justifier la décroissance de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et l'interpréter dans le contexte proposé.
2. Déterminer le comportement de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
3. Résoudre l'équation $f(t) = 42$ (arrondir à la seconde près).
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\ ;10]$.
5. Calculer $f'(0)$.

Partie C

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Les réponses doivent être justifiées.

On pourra s'aider des résultats obtenus précédemment. En cas de résolution par lecture graphique, on laissera sur le document annexe (page 5) une trace des traits de construction, et on explicitera la démarche.

1. La température du café finit par atteindre 19°.
2. La vitesse de refroidissement du café à $t = 0$ est de 10 degrés par minutes.
3. Monsieur Lemcho n'apprécie son café que si sa température est supérieure à 42°. Il dispose alors de moins de 3 minutes pour déguster son café.
4. La température moyenne du café durant les 10 premières minutes est d'environ 40°, à un degré près.

Exercice 2 (8 points)

Les quatre parties peuvent être traitées indépendamment

Partie A

Un sachet de café est conditionné à l'entreprise MDD par une ensacheuse.

On teste l'efficacité de l'ensacheuse sur un échantillon de 300 sachets en mesurant leur masse. On obtient les résultats suivants :

Masse en g	[242;246[	[246;250[	[250;254[	[254;258[	[258;262[
effectifs	2	8	268	21	1

La machine a besoin d'un réglage si l'une des conditions n'est pas vérifiée :

- la masse moyenne des sachets de l'échantillon est comprise entre 252g et 254 g.
- l'écart type de la série de l'échantillon est inférieur à 1,5 g.
- la proportion de sachets ayant une masse inférieure à 250 g est inférieure à 4%.

Cette machine doit-elle être réglée ? Justifier la réponse.

Partie B

L'entreprise Café grand Père commercialise les sachets de café. On admettra que la variable aléatoire X qui représente la masse d'un sachet suit la loi normale de moyenne $\mu = 253$ et d'écart type $\sigma = 1{,}5$.

1. Calculer $P(X \leq 250)$. Donner la valeur numérique arrondie au millième.
2. Un sachet est vendu pour un poids de 250 g. Quelle est la probabilité que la masse d'un sachet soit d'au moins 250 g ? Donner la valeur numérique arrondie au millième.
3. La société voudrait que le taux de sachet dont la masse est inférieure à 250 g soit inférieur à 1%, sans changer la valeur de l'écart type. Quelle devrait être la valeur de la moyenne μ ? (à 0,1 g près)

Partie C

Les sachets sont conditionnés par lots de 100. On note E l'événement :
E : « un sachet a une masse inférieure à 250 g ». On supposera que $P(E) = 0{,}02$ et que les sachets sont répartis de façon indépendante dans chaque lot.
Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de sachets vérifiant l'événement E.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. En moyenne, combien y-a-t-il de sachets dont la masse est inférieure à 250 g dans un lot ?
3. Calculer la probabilité que tous les sachets aient une masse supérieure à 250 g. Donner la valeur numérique arrondie au millième.
4. Calculer $P(Y \geq 2)$. Donner la valeur numérique arrondie au millième.

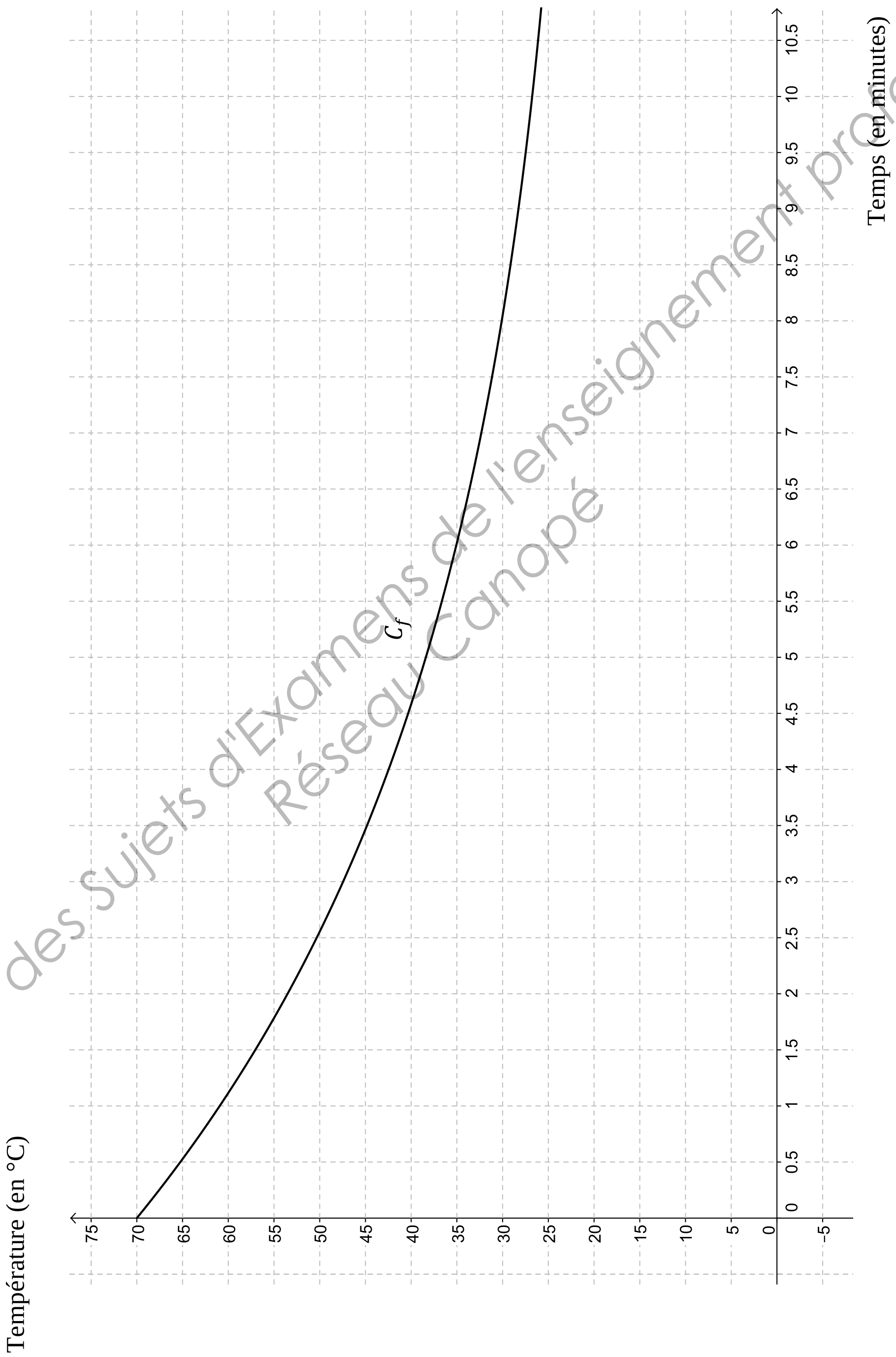
Partie D

Un distributeur de café est installé dans l'entreprise MDD et on note qu'en moyenne il y a 5 personnes utilisant le distributeur entre 10h et 10h30 un jour de semaine.
Soit Z la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes utilisant le distributeur de café entre 10h et 10h30 un jour de semaine. On admet que Z suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Quelle est la valeur de λ ?
2. Calculer la probabilité qu'il y ait moins de 5 personnes au distributeur de café entre 10h et 10h30 un jour de semaine. Donner la valeur numérique arrondie au millième.

Annexe 1

Document à rendre avec la copie



BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
AGENCEMENT DE L'ENVIRONNEMENT ARCHITECTURAL

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2\sin t \cos t$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t\to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\sin t$	$\cos t$
e^t	e^t	$\cos t$	$-\sin t$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$\left(e^u\right)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$

d) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$x'' + \omega^2 x = 0$	$x(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$

3. ***PROBABILITES***

a) **Loi binomiale** $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X)=np$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

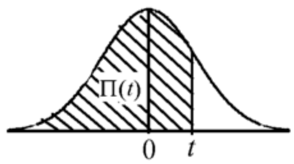
k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE *t*

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
Π(*t*)	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$