RESEAU-CANOPE.FR
CANOPÉ
LE RÉSEAU DE CRÉATION
ET D'ACCOMPAGNEMENT PÉDAGOGIQUES

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

Ce document a été numérisé par le Canopé de l'académie de Bordeaux
pour la Base nationale des sujets d'Examens de l'enseignement professionnel.

Ce fichier numérique ne peut être reproduit, représenté, adapté ou traduit sans autorisation.

Brevet de Technicien Supérieur
Groupement A2

MATHÉMATIQUES

SESSION 2014

SPÉCIALITÉS	COEFF	DURÉE
ÉLECTROTECHNIQUE	**2**	**3**
GÉNIE OPTIQUE	**3**	**3**

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

Matériel autorisé :
Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique sont autorisées à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Circulaire 99-186 du 16 novembre 1999

Documents à rendre et à agrafer avec la copie :
Document réponse 1 ....page 9/11
Document réponse 2 ....page 10/11

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

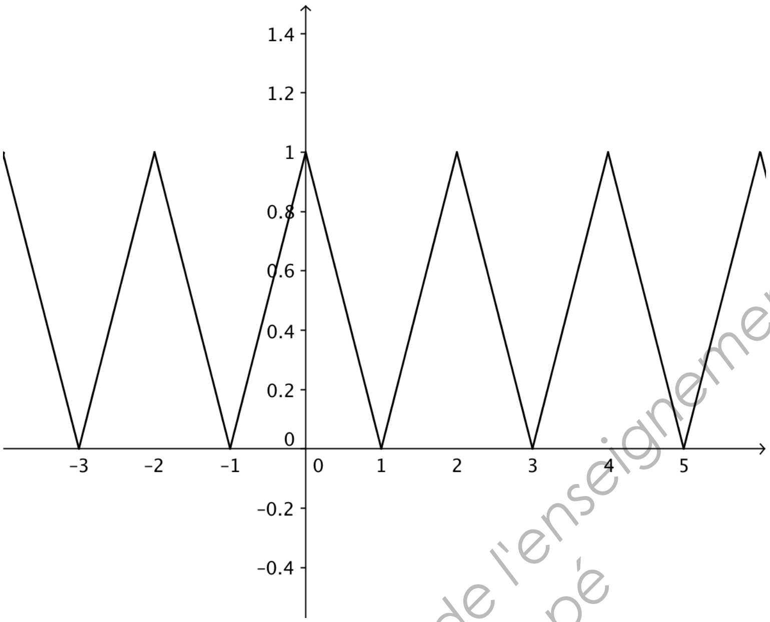
Ce sujet comporte 11 pages numérotées de 1 à 11.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE 1 (10 points)

Partie A

On considère la fonction f, périodique de période T, dont une représentation graphique est donnée par la figure ci-dessous.



Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

Le développement en série de Fourier de la fonction f est noté :

$$a_0 + \sum_{n\geqslant 1} \left(a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)\right).$$

1. Cette question est un QCM.
   Pour chaque affirmation, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie.

   (a) La période T de la fonction f est :

   - 0,5
   - 1
   - 2
   - 3

   (b) Le coefficient b_1 vaut :

   - $-\dfrac{4}{\pi^2}$
   - 0
   - $\dfrac{1}{4}$

   (c) Le nombre réel a_0 vaut :

   - 0
   - 0,25
   - 0,5
   - 1

(d) On donne l'égalité suivante

$$\int_0^1 (1-t)\cos(\pi t)\,dt = \frac{2}{\pi^2}.$$

La valeur exacte du coefficient a_1 est :

- 0
- $\dfrac{4}{\pi^2}$
- $\dfrac{2}{\pi^2}$
- $\dfrac{1}{\pi^2}$

Application de la formule de Bessel-Parseval

2. On rappelle que la puissance moyenne P_f, par période du signal, modélisé par une fonction f de période T est donnée par

$$P_f = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t)]^2\,dt.$$

Démontrer que $P_f = \dfrac{1}{3}$.

3. On note g_n la fonction définie, pour tout nombre entier n strictement positif par

$$g_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=n} \left(a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)\right)$$

et

$$S_n = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

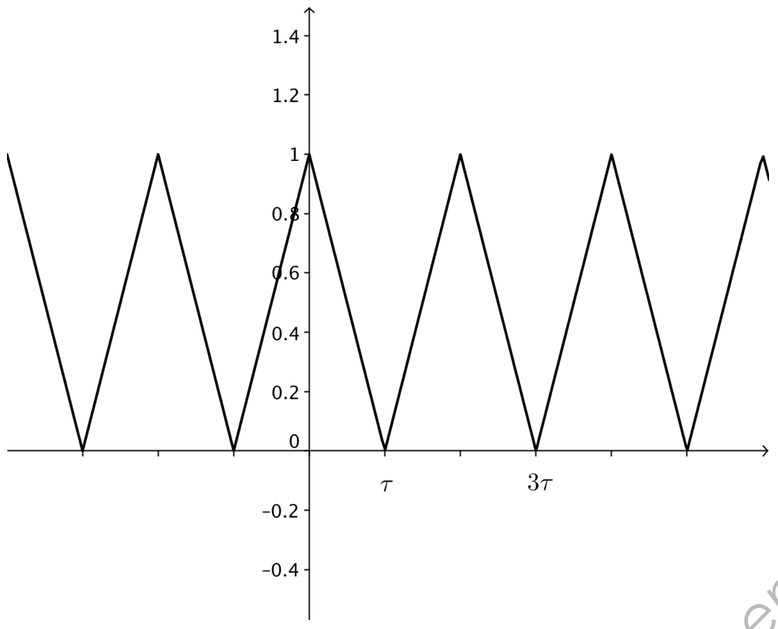
(a) Le tableau 1 du document réponse 1 fournit des valeurs approchées à 10^{-4} près de S_n. Compléter ce tableau.

(b) En déduire la plus petite valeur de l'entier n telle que la puissance moyenne par période de la fonction g_n est supérieure ou égale à $0{,}999\,P_f$.

Partie B

Soit τ un nombre réel strictement positif.
On s'intéresse maintenant à la fonction e représentant un signal de même forme que celui de la partie A, mais dont la période, exprimée en seconde, est 2τ et dont le graphe est représenté ci-après.

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé



Ce signal est placé en entrée d'un filtre passe-bas (il s'agit d'un filtre de Butterworth d'ordre 6 et de fréquence de coupure 40 Hz).
Le signal de sortie obtenu est modélisé par une fonction h.

1. On se place dans le cas où la fonction e est telle que $\tau = 0{,}1$.
   La figure 1 du document réponse 1 donne une représentation graphique de la fonction h sur l'intervalle $[-0{,}4\,;\,0{,}4]$, obtenue à l'aide d'un logiciel de simulation.

   (a) Déterminer graphiquement la valeur maximale h_{max} de la fonction h.

   (b) Sur la figure 1 du document réponse 1, tracer la représentation graphique de la fonction e.

   (c) Le *facteur de crête* du signal h, exprimé en décibels, est défini par

   $$F_c = \frac{10}{\ln(10)} \ln\left(\frac{h_{max}^2}{P_h}\right).$$

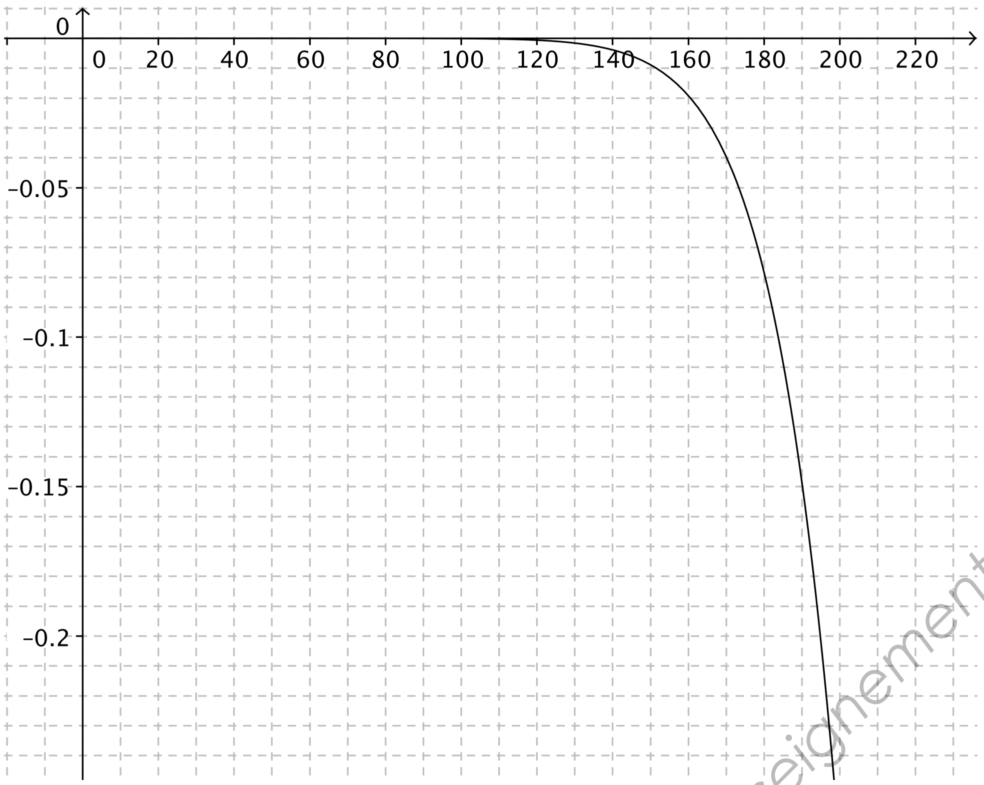
   On a obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul numérique la valeur approchée suivante de la puissance moyenne par période P_h du signal h :

   $$P_h \simeq 0{,}33330.$$

   En déduire une valeur approchée du facteur de crête F_c.

2. On note $G(\omega)$ le gain, exprimé en décibels, du filtre passe-bas en fonction de la pulsation ω.
   Le graphique ci-après donne une représentation graphique de la fonction G pour les « petites » valeurs de la pulsation ω.

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé



(a) Déterminer graphiquement l'intervalle des valeurs de ω pour lesquelles on a

$$G(\omega) \geqslant -0{,}1\,\mathrm{db}$$

.

(b) On donne l'expression de $G(\omega)$:

$$G(\omega) = \frac{-10}{\ln(10)} \ln\left(1 + \left(\frac{\omega}{80\pi}\right)^{12}\right).$$

On note ω_0 la solution de l'équation $G(\omega) = -0{,}1$.

Déterminer, à 10^{-1} près, en précisant la démarche suivie, une valeur approchée de ω_0.

Remarque. *La notion de facteur de crête d'un signal est utile, par exemple, en télécommunications. On trouve aisément dans la littérature le facteur de crête du signal triangulaire e, à savoir 4,77 db.*

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

EXERCICE 2 (10 points)

On s'intéresse à un dispositif comportant deux composants électriques A et B montés en parallèle. Si un seul de ces deux composants est défaillant, le dispositif continue à fonctionner.

Partie A

Dans cette partie, on étudie la durée de vie de ce dispositif.
La durée de vie de chaque composant est une variable aléatoire.

1. On désigne par t un nombre réel strictement positif. On admet que la probabilité $p(t)$ que le composant A ait une durée de vie strictement inférieure à t est donnée par

$$p(t) = \int_0^t 0{,}0004\,\mathrm{e}^{-0{,}0004x}\,\mathrm{d}x.$$

   Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, que le composant A ait une durée de vie strictement inférieure à 1000 heures.

2. Sur le document réponse 2 est donné l'arbre pondéré décrivant la situation du dispositif au bout de 1000 heures.
   C_1 désigne l'événement « le composant A est en état de fonctionnement » et C_2 désigne l'événement « le composant B est en état de fonctionnement ».

   (a) Compléter l'arbre du document réponse 2 et indiquer le détail des calculs des probabilités dans la colonne « Probabilités ».

   (b) Déterminer la probabilité de l'événement C_2.

   (c) Les événements C_1 et C_2 sont indépendants ? Justifier la réponse.

   (d) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au bout de 1000 heures, le dispositif soit en état de fonctionnement.

Partie B

Dans cette partie, les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3} près.
Une entreprise produit en grande série le composant A dont il est question dans la partie A. Une étude statistique permet d'admettre que la probabilité qu'un composant ait une durée de vie supérieure à 1000 heures est 0,67. Les durées de vie des composants sont indépendantes les unes des autres.
Pour un échantillon de 50 composants, on note X la variable aléatoire égale au nombre de composants ayant une durée de vie supérieure à 1000 heures.

1. On admet que X suit une loi binomiale.
   Préciser les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité $P(X = 42)$.

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

3. Ci-dessous est donné un extrait du tableau, obtenu à l'aide d'un tableur, donnant les valeurs des probabilités $P(X \leqslant k)$, où k désigne un nombre entier naturel appartenant à l'intervalle $[0; 50]$.

	A	B	C	D
1	*k*	*p(X≤k)*		
2	38	0,93714961		
3	39	0,96825995		
4	40	0,98562989		
5	41	0,99423141		
6	42	0,99797363		
7	43	0,99938718		
8	44	0,99984376		
9	45	0,99996736		
10	46	0,99999464		
11	47	0,99999935		
12	48	0,99999995		
13	49	1		
14	50	1		
15				
16				

À l'aide de ce tableau, déterminer la probabilité que le nombre de composants ayant une durée de vie supérieure à 1000 heures parmi cet échantillon soit strictement supérieur à 42.

4. Sur l'annexe, le diagramme en bâtons représente les valeurs de $P(X \leqslant k)$ en fonction de k.

   (a) À l'aide de ce diagramme, déterminer le plus petit nombre entier naturel k_1 tel que

$$P(X \leqslant k_1) > 0{,}025,$$

   puis le plus petit nombre entier naturel k_2 tel que

$$P(X \leqslant k_2) \geqslant 0{,}975.$$

   (b) Peut-on affirmer : « *le nombre de composants dont la durée de vie est supérieure à 1000 heures appartient à l'intervalle* $[27; 40]$ *avec une probabilité supérieure à 0,95* » ? Justifier la réponse.

Partie C

Dans cette partie, on décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne 33,5 et d'écart type 3,3.
On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne $\mu = 33{,}5$ et d'écart type $\sigma = 3{,}3$.

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

1. Justifier le choix des paramètres μ et σ.
2. Calculer la probabilité $P\,(Y \leqslant 42)$ arrondie à 10^{-2}.
3. Déterminer la plus petite valeur, arrondie à 10^{-1}, du nombre réel a tel que

$$P\,(33{,}5 - a \leqslant Y \leqslant 33{,}5 + a) \geqslant 0{,}95.$$

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

Document réponse 1 à rendre avec la copie

n	1	2	3	4	5	6
a_n^2	0,164 3	0	0,002 0	0	0,000 3	0
S_n	0,332 1	0,332 1				

Tableau 1 – Puissances des harmoniques

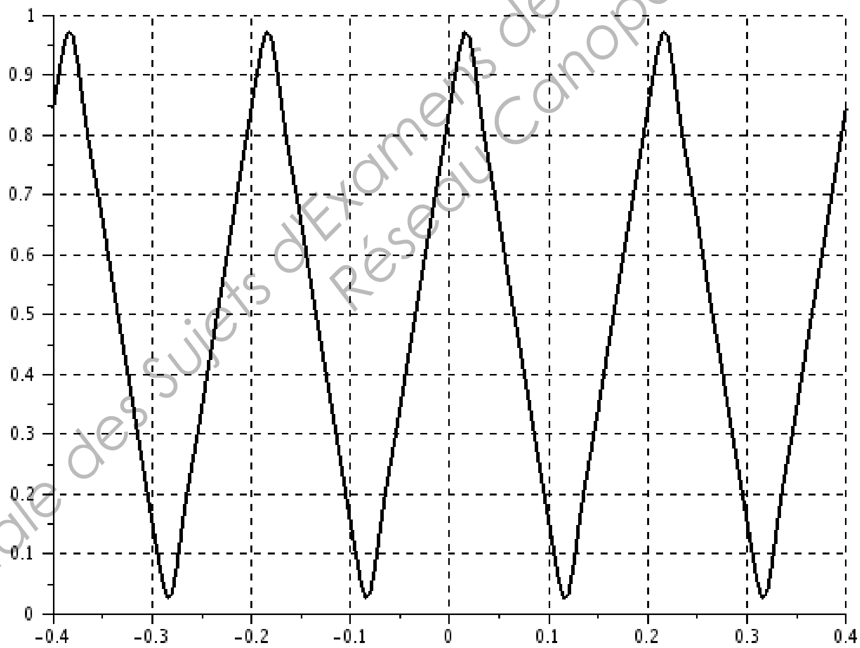
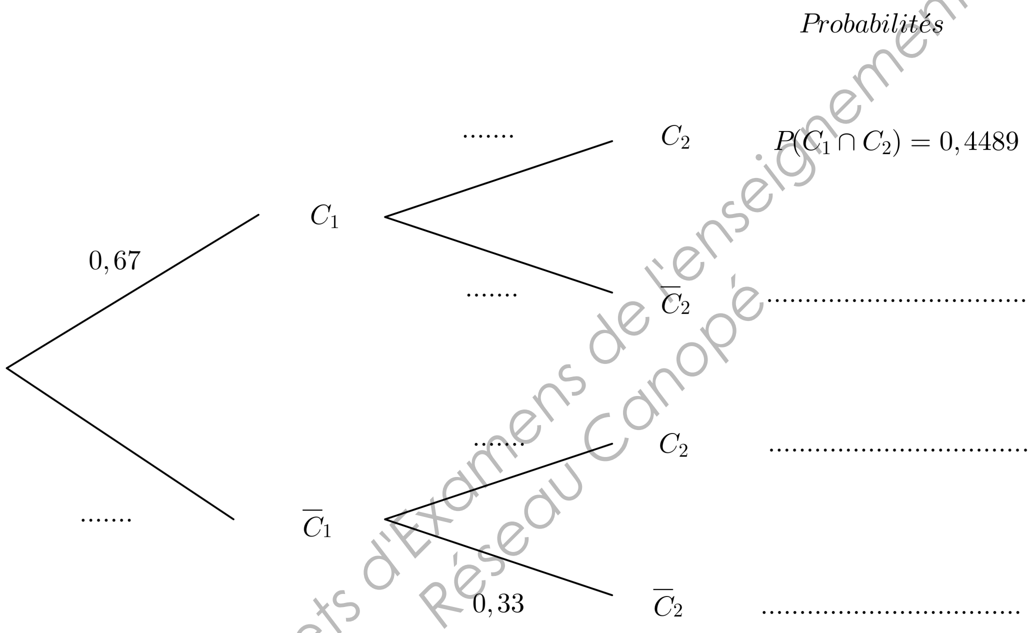


FIGURE 1 – La fonction h

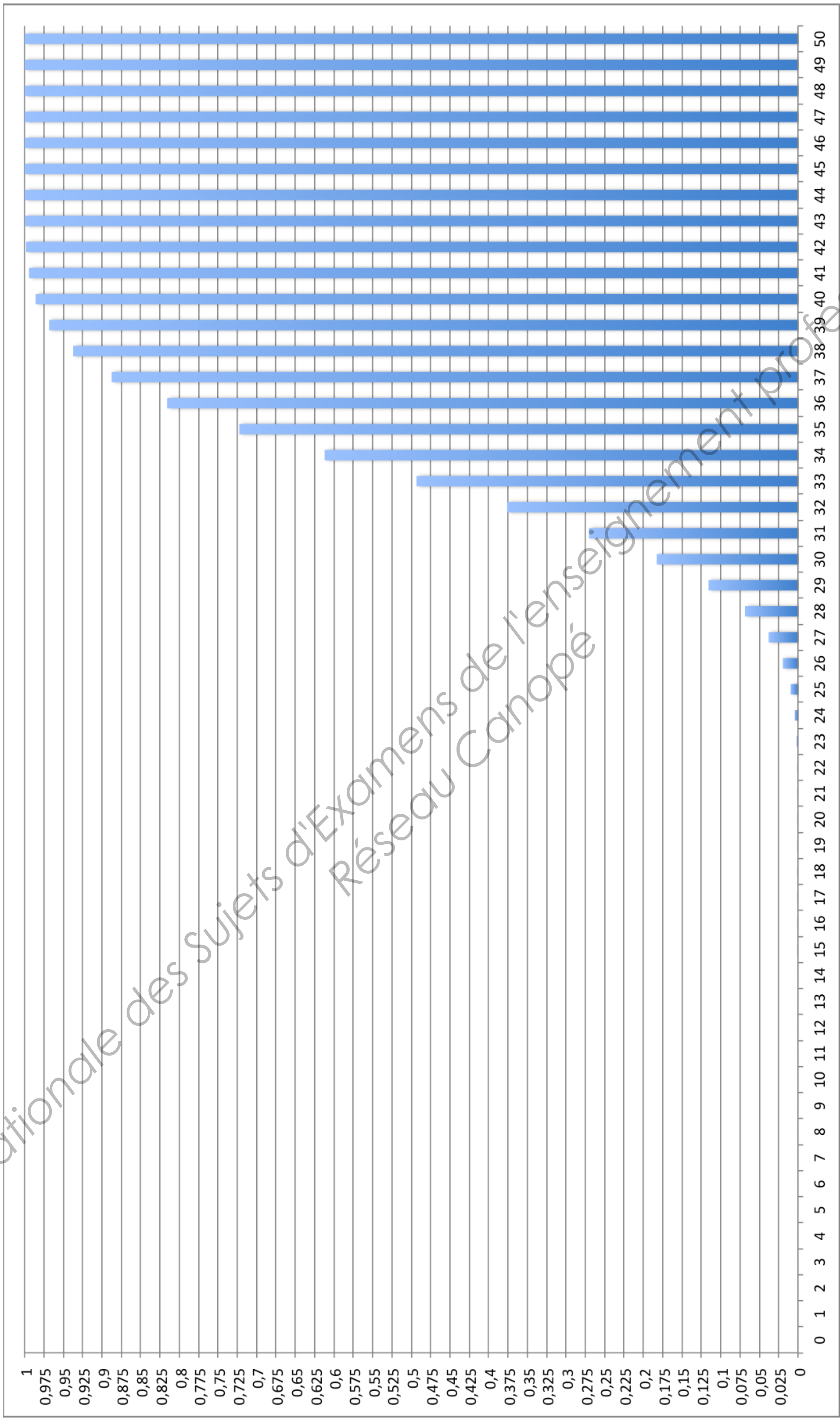
Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

Document réponse 2 à rendre avec la copie



Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé

Annexe



Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau Canopé