BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
COMPTABILITÉ ET GESTION DES ORGANISATIONS

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Session 2014

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

Matériel et documents autorisés :

- L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.
- Toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante (Circulaire n°99-186, 16/11/1999).

Documents à rendre avec la copie :

- Annexe 1 .... p. 6/7
- Annexe 2 .... p. 7/7

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 7 pages, numérotées de 1 à 7.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées de 1 à 2.

Le sujet comporte 2 exercices indépendants
qui seront traités sur des copies séparées

Exercice n° 1 (11 points)

Une entreprise fabrique un certain type d'articles. Sa capacité maximale de production est de 80 articles.

Partie A. Ajustement affine.

Le tableau ci-dessous donne le coût total de production, en centaines d'euros, en fonction du nombre d'articles fabriqués par cette entreprise.

Nombre d'articles fabriqués : x	10	20	30	50	70	80
Coût total de production : y	2	3	5	8,5	18	38

1. On donne **en annexe 1** le nuage de points associé à cette série statistique.
On renonce à un ajustement affine pour ce nuage de points. Justifiez ce choix.

2. On effectue maintenant le changement de variable $z = \ln(y)$ ..

a) Compléter le tableau donné **en annexe 1 à rendre avec la copie**. On arrondira les valeurs approchées à 10^{-2}.

b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = ax + b$ où les constantes a et b sont à arrondir à 10^{-2}.

c) En déduire que l'expression de y en fonction de x est $y = 1{,}36e^{0{,}04x}$.

d) À l'aide de la question précédente, donner une estimation, à un euro près, du coût total de production de 60 articles.

Partie B. Calcul intégral

On admet que le coût total de production, en centaines d'euros, en fonction du nombre x d'articles fabriqués par cette entreprise est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 80] par : $f(x) = 1{,}36e^{0{,}04x}$.

1. Calculer $f(0)$. Quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?

2. On note I = $\int_1^{80} f(x)dx$. Montrer que : I = $34\left(e^{3{,}2} - e^{0{,}04}\right)$.

3. En déduire une valeur arrondie à 10^{-2} de la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 80].

4. Donner, à l'aide d'une phrase, une interprétation de la valeur trouvée à la question précédente.

Partie C. Étude d'une fonction et applications.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle [1 ; 80] par $g(x) = \dfrac{1{,}36e^{0{,}04x}}{x}$.

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le plan muni d'un repère orthogonal donnée en **annexe 2**. **Cette annexe est à rendre avec la copie**

1. On admet que la fonction g est dérivable et on désigne par g' sa fonction dérivée.

a) Montrer en détaillant les calculs que, pour tout x de l'intervalle [1 ; 80]

$$g'(x) = \frac{1{,}36e^{0{,}04x}}{x^2}(0{,}04x - 1).$$

b) Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle [1 ; 80].

c) Établir le tableau des variations de la fonction g sur l'intervalle [1 ; 80]. On précisera les valeurs particulières (extrémums et valeurs aux bornes).

d) Résoudre graphiquement dans l'intervalle [1 ; 80] l'inéquation : $g(x) \leq 0{,}25$.
On laissera sur la figure **de l'annexe 2** les traits de construction.

2. On admet que la fonction g définie dans cette partie modélise le coût moyen de production d'un article, exprimé en centaines d'euros ; autrement dit, pour x articles fabriqués, $g(x)$ correspond au coût moyen de production d'un article. On suppose que l'entreprise fabrique au moins un article.

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats obtenus précédemment.

a) Combien l'entreprise doit-elle fabriquer d'articles pour que le coût moyen de production d'un article soit minimal ?

b) On souhaite que le coût moyen de production d'un article soit inférieur ou égal à 25 euros. Pour quelles quantités d'articles à fabriquer cet objectif est-il atteint ?

Exercice n° 2 (9 points)

Partie A.

Un magasin spécialisé dans la vente de produits frais non stockables s'approvisionne quotidiennement auprès de deux grossistes ADON et BRIX.
Le grossiste ADON fournit 75 % des produits et le grossiste BRIX fournit les autres produits.
93 % des produits provenant du grossiste ADON sont commercialisables et 85 % des produits provenant du grossiste BRIX sont commercialisables.
Un jour donné, on prélève au hasard un produit parmi la totalité des produits livrés ce jour par les deux grossistes. On suppose que tous les produits ont la même probabilité d'être prélevés.
On définit les évènements suivants :

A: « Le produit prélevé provient du grossiste ADON » ;
B: « Le produit prélevé provient du grossiste BRIX » ;
C: « Le produit prélevé est commercialisable ».

1. Donner les probabilités suivantes : $P(A)$, $P(B)$, $P_A(C)$ et $P_B(C)$.
   On rappelle que $P_A(C)$ désigne la probabilité de l'événement C sachant que l'événement A est réalisé.
2. Calculer les probabilités $P(A \cap C)$ et $P(B \cap C)$.
3. En déduire la probabilité que le produit prélevé soit commercialisable.
4. Calculer la probabilité qu'un produit prélevé provienne du grossiste ADON sachant qu'il est commercialisable. On arrondira le résultat au centième.

Dans les parties B et C, les résultats demandés seront arrondis à 10^{-2}.

Partie B.

Dans la livraison de ces produits un jour donné, on prélève au hasard 20 produits pour effectuer un contrôle. La livraison est assez importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 produits. On note E l'évènement : « un produit prélevé au hasard dans cette livraison n'est pas commercialisable ». On admet que $P(E) = 0,09$.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 20 produits, associe le nombre de produits non commercialisables parmi ces 20 produits.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement deux produits qui ne soient pas commercialisables.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au moins dix-neuf produits qui soient commercialisables.

Partie C.

Dans cette partie, on s'intéresse à la vente d'articles d'un même type parmi l'ensemble des produits frais proposés.
Le nombre d'articles de ce type vendus par jour peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 10. Le magasin réalise sur la vente de chaque article un bénéfice de 3 euros.

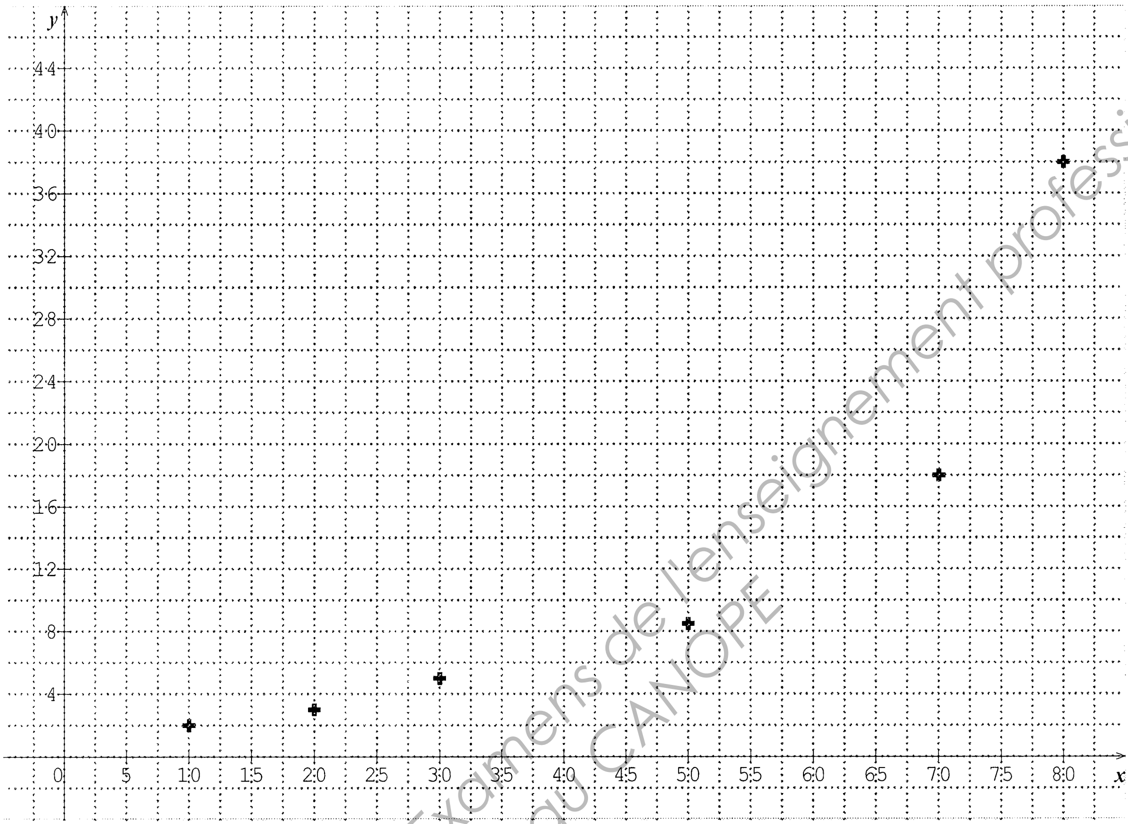
1. a) Quelle quantité d'articles de ce type doit-on vendre un jour donné pour réaliser un bénéfice journalier de 150 euros ?
b) Calculer la probabilité que le bénéfice journalier sur la vente de des articles de ce type soit au moins égal à 150 euros.

2. Si la quantité d'articles de ce type en stock en début de journée est de 55 unités, quelle est la probabilité que le magasin ne soit pas en rupture de stock sur cet article un jour donné ?

3. De quelle quantité minimale d'articles de ce type doit-on disposer en début de journée pour que la probabilité de rupture de stock avant la fin de la journée soit inférieure à 0,025 ?

Annexe 1 à rendre avec la copie

Exercice n° 1, partie A, question 1.

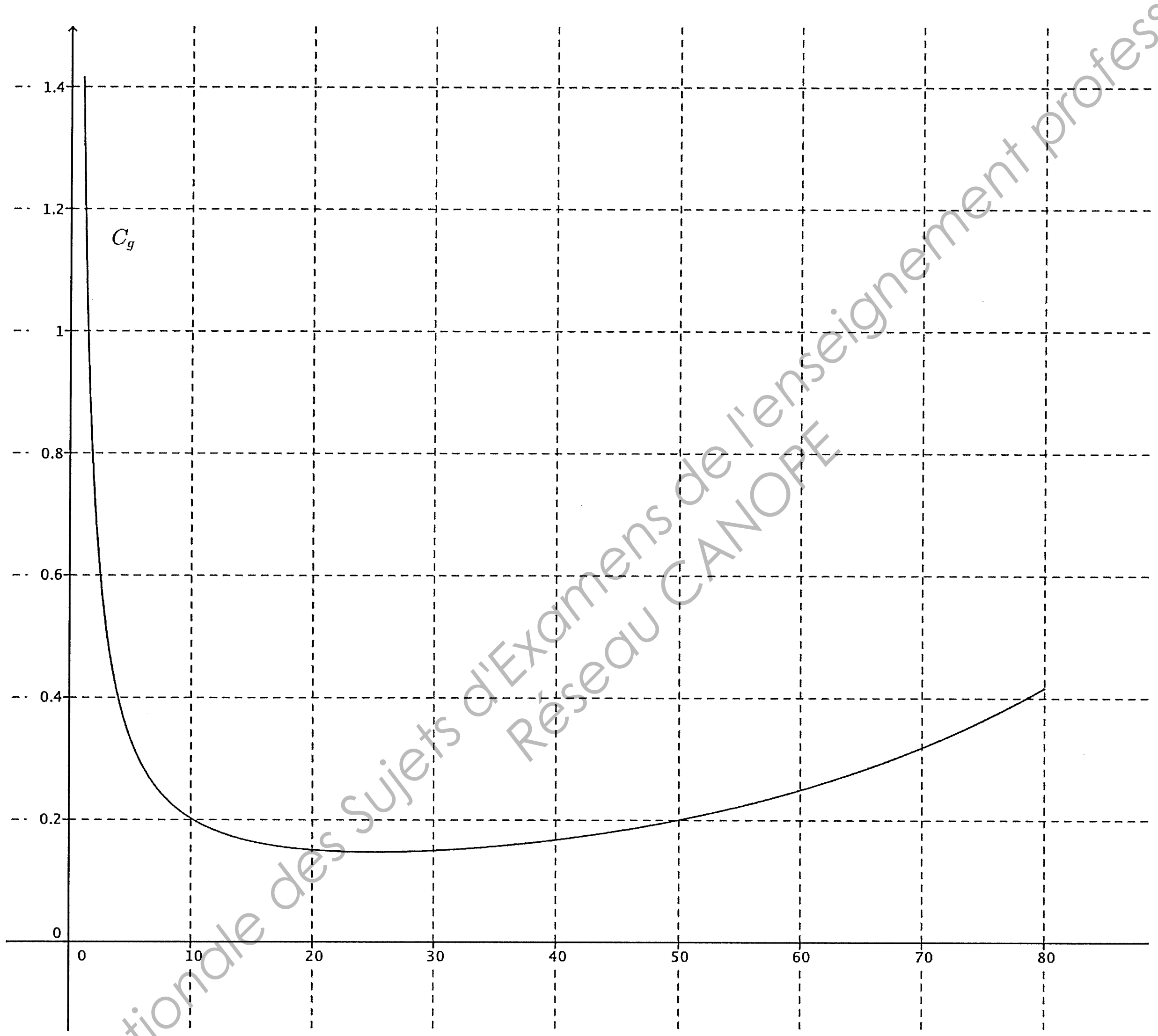


Exercice n° 1, partie A, question 2.

Nombre d'articles fabriqués : x	10	20	30	50	70	80
$z = \ln(y)$						

Annexe 2 à rendre avec la copie

Exercice n ° 1, partie C, question 1. d).



FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

BTS : COMPTABILITÉ ET GESTION DES ORGANISATIONS

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES* :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$	$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$
$(ku)' = ku'$	$(e^u)' = e^u u'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt$$

3. *PROBABILITES* :

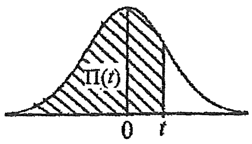
a) Loi binomiale $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE *t*

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
Π(t)	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$