BREVET DES METIERS D'ART

GRAPHISME ET DECOR

Option A : Graphiste en lettres et décors

Option B : Décorateur de surfaces et volumes.

Domaine A1- Epreuve E2

MATHEMATIQUES – SCIENCES PHYSIQUES

Le sujet comporte 12 pages avec 10 exercices :

- Partie MATHEMATIQUES sur 30 points.
  - Exercice 1 : Calculs de volumes (5,5 points)
  - Exercice 2 : Etude d'une fonction (10 points)
  - Exercice 3 : Coordonnées de points d'intersection (3,5 points)
  - Exercice 4 : Calcul vectoriel (6 points)
  - Exercice 5 : Suite numérique (5 points)

- Partie SCIENCES PHYSIQUES sur 30 points.
  - Exercice 6 : Optique (Contrôle visuel) (7 points)
  - Exercice 7 : Optique (Couleurs) (3 points)
  - Exercice 8 : Electricité (Eclairage de la fresque) (5 points)
  - Exercice 9 : Chimie (Enduit à la chaux) (7 points)
  - Exercice 10 : Optique (Eclairage du flacon) (8 points)

- Les 3 annexes (pages 8 à 10) sont à rendre avec la copie.

- Un formulaire de mathématiques est fourni à la page 12.

- L'usage de la calculatrice est autorisé.

- La clarté des raisonnements, la qualité de la rédaction et le soin apporté aux tracés interviendront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Assurez-vous que cet exemplaire est complet.
S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

Partie Mathématiques sur 30 points.

Un club de rugby a décidé la création d'un parfum dont le flacon a une forme assimilée à un prisme.

Le bouchon de ce flacon est constitué d'une résine transparente, avec un vide à l'intérieur de forme cylindrique (figure 1). A l'intérieur du bouchon, le nouvel écusson est à insérer. (figure 2)

Le bouchon est assimilé à un prisme à base triangulaire ABC de hauteur h = 5,5 cm. (figure 1)
Le triangle ABC est équilatéral de coté 11 cm.

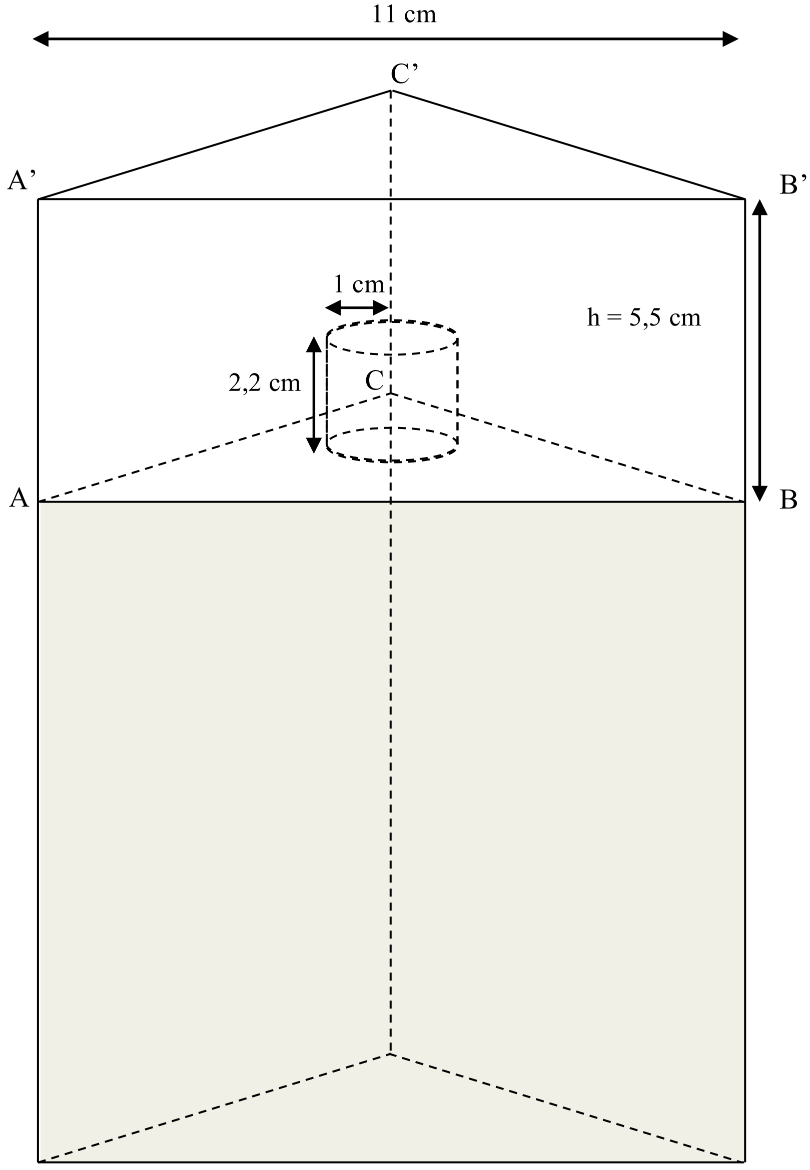


figure 1

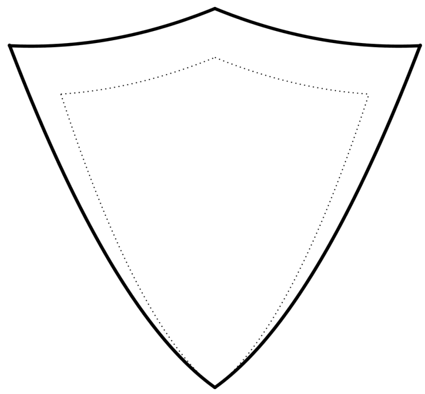


figure 2

Exercice 1 : Calcul de volumes (5,5 points)

On souhaite calculer la quantité de résine nécessaire à la fabrication de 4 000 bouchons.

1.1. Dans le repère de l'annexe 1.

1.1.1. Placer les points A, B et C de coordonnées : A (-5,5 ; 8), B (5,5 ; 8), C (0 ;-1,5)

1.1.2. Tracer le triangle ABC.

1.1.3. Placer le point H milieu du segment [AB].

1.2. On rappelle que le triangle ABC est équilatéral.
Calculer la mesure de la hauteur HC issue du point C du triangle ABC. Arrondir le résultat au dixième.

1.3. Indiquer le calcul permettant de vérifier que l'aire A_1 du triangle ABC est égale à 52,25 cm².

1.4. Calculer, en cm^3, le volume V_1 du prisme. Arrondir le résultat au dixième.

1.5. Calculer, en cm^2, l'aire A_2 de la base du cylindre de rayon $R_1 = 1$ cm.

1.6. Calculer, en cm^3, le volume V_2 du cylindre. Arrondir le résultat au dixième.

1.7. En déduire, en cm^3, le volume de matière V d'un bouchon.

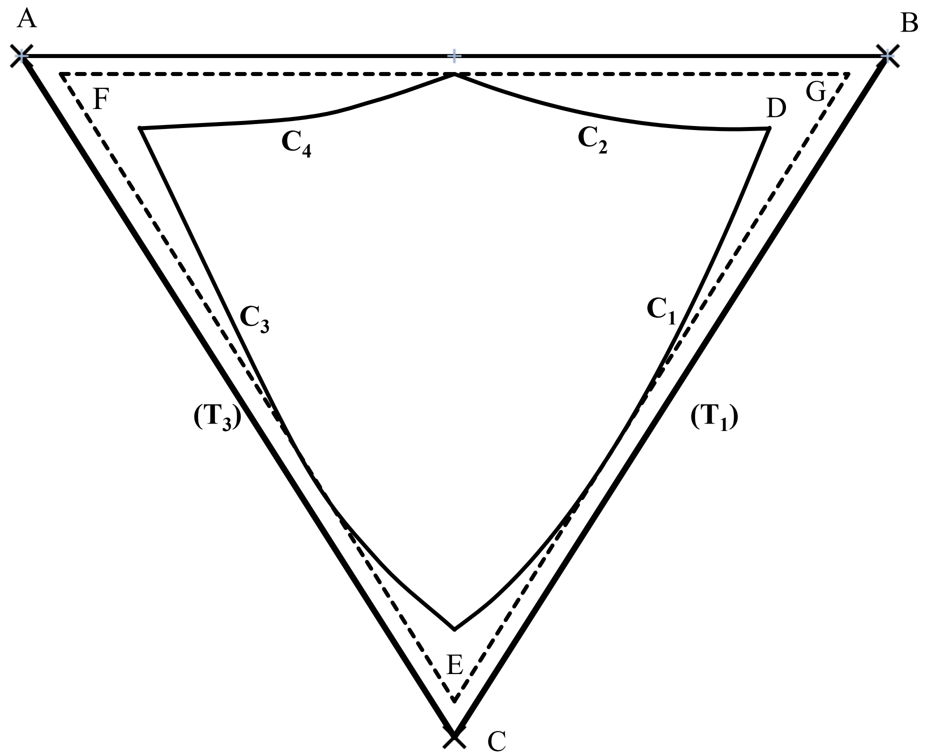
1.8. Quantité de résine

1.8.1. Déterminer, en cm^3, la quantité de résine nécessaire à la fabrication de 4 000 bouchons.

1.8.2. Exprimer cette quantité en litre.

Exercice 2 : Etude d'une fonction (10 points)

figure 3



L'étude suivante porte sur l'arc de parabole C_1.

Les points O, I et D de coordonnées respectives (0 ; 0), (2 ; 2,5) et (4 ; 7) appartiennent à l'arc de parabole C_1. Leurs coordonnées vérifient la relation : $y = ax^2 + bx + c$. (a, b et c sont des réels)

2.1. En utilisant les coordonnées des points O, I et D, montrer que c = 0 et que les valeurs de a et b sont solutions du système de deux équations à deux inconnues donné ci-dessous :

$$\begin{cases} 2a + b = 1,25 \\ 4a + b = 1,75 \end{cases}$$

2.2. Résoudre le système précédent et montrer que $y = 0,25\,x^2 + 0,75\,x$.

On définie pour x appartenant à l'intervalle [0 ; 4] la fonction f par $f(x) = 0{,}25\,x^2 + 0{,}75\,x$

2.3. On désigne par f' la dérivée de la fonction f. Montrer que $f'(x) = 0{,}5\,x + 0{,}75$

2.4. Résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$.

2.5. En déduire la variation de f sur l'intervalle [0 ; 4].

2.6. Compléter, sur l'annexe 1, le tableau de variations de la fonction f.

2.7. Compléter, sur l'annexe 1, le tableau de valeurs de la fonction f. Arrondir les résultats au dixième.

2.8. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 4] dans le repère de l'annexe 1.

2.9. Calculer $f'(2)$.

2.10. Montrer que l'équation de la tangente à la courbe C_1 au point I d'abscisse 2, peut s'écrire (T_1) :
$y = 1{,}75\,x - 1$

On rappelle : Equation de la tangente au point d'abscisse x_0 ; $y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$

2.11. Dans le repère de l'annexe 1, tracer la droite (T_1).

2.12. Une équation de la droite (BC) est $y = \dfrac{19}{11}x - 1{,}5$. Les droites (BC) et (T_1) sont-elles parallèles ?

Justifier la réponse.

2.13. Dans le repère de l'annexe 1 compléter par symétrie le profil de l'écusson.

Exercice 3 : Coordonnées des points d'intersection entre les arcs C_1 et C_2 (3,5 points).

C_2 est la représentation graphique de la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 4] par :

$$g(x) = 0{,}06\,x^2 - 0{,}43\,x + 7{,}75.$$

3.1. A l'aide du repère de l'annexe 1, déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection D des représentations graphiques des fonctions f et g. Laisser apparents les traits utiles à la lecture.

3.2. Pour trouver, par le calcul, l'abscisse de ce point D, on résout l'équation $f(x) = g(x)$.

3.2.1. Montrer que l'équation $f(x) - g(x) = 0$ peut s'écrire :

$0{,}19\,x^2 + 1{,}18\,x - 7{,}75 = 0$

3.2.2. Résoudre cette équation. Les solutions seront arrondies au dixième.

3.2.3. En déduire les coordonnées du point D.

Exercice 4 : Vérification de la contrainte par un calcul vectoriel (6 points)

On considère les points E (0 ; -1), F (5 ; 7,75) et G (-5 ; 7,75), (figure 3)

Les contraintes pour des raisons esthétiques sont :

- l'aire A_3 du triangle EFG doit représenter entre 80% et 85% de l'aire A_1 du triangle ABC.
- l'angle entre les deux tangentes (T_1) et (T_3) doit être égal à 60°.

Détermination de la valeur en degré de l'angle $\widehat{FEG}$.

4.1. Sur le repère de l'annexe 1, placer les points E, F et G puis tracer les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$.

4.2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$.

4.3. Indiquer le calcul permettant de vérifier que la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{EG}$ est égale à 51,56.

4.4. Calculer les valeurs des normes des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$. Arrondir le résultat au centième.

4.5. Déduire des calculs précédents la valeur de cos (FEG).

4.6. Indiquer alors, en degré, la valeur de l'angle $\widehat{FEG}$. Arrondir le résultat à l'unité.

4.7. L’aire du triangle EFG est A_3 = 43,75 cm². Calculer la valeur du rapport A_3/A_1.
4.8. Les contraintes imposées sont-elles respectées ? Justifier la réponse.

Exercice 5 : Suite numérique (5 points)

Le président du club commande en 2014 une série limitée de 4000 exemplaires. Il désire augmenter chaque année de 20 % la commande du nombre de flacons par rapport à l’année précédente jusqu’à atteindre une commande annuelle d’au moins 20 000 exemplaires.

Soit u_1 le nombre d’exemplaires commandés en 2014. On note u_2, u_3, u_4, …. u_n le nombre de flacons à commander en 2015, 2016, 2017, …. 2014 + (n - 1).
5.1. Déterminer le nombre de flacons u_2, u_3, u_4 à commander en 2015, 2016 et 2017.
5.2. En déduire que u_1, u_2, u_3, u_4 sont les premiers termes d’une suite (u_n) dont on indiquera la nature et la raison. Justifier la réponse.
5.3. Exprimer u_n en fonction de n.
5.4. Calculer u_{10}. En déduire le nombre de flacons à commander en 2023.
5.5. Déterminer le nombre d’années au bout duquel la commande dépassera les 34 000 exemplaires.

Partie Physique-Chimie sur 30 points

Dans la nouvelle salle de réception du club de rugby, le flacon est exposé dans une vitrine et une fresque à la chaux avec un éclairage adapté représente l’écusson en couleur.

Exercice 6 : Contrôle visuel des cartons d’invitation (7 points)

Pour l’inauguration, des cartons d’invitation avec une reproduction de l’écusson sont réalisés.
Afin d’effectuer un contrôle visuel et distinguer les détails de l’écusson, le président du club utilise une loupe de 25 dioptries.
La loupe est placée à 3 cm d’une lettre de 1,5 cm de hauteur, notée AB.
L’image A’B’ de l’objet AB vue à travers la loupe est droite et mesure 6 cm de hauteur.

6.1. A quel type de lentille peut être assimilée la loupe ?
6.2. Calculer la distance focale f de cette loupe.
6.3. Calculer le grandissement γ de la loupe.
6.4. Calculer la position OA’ de l’image, sachant que O est le centre optique de cette loupe.
6.5. Sur le schéma de l'annexe 2 :
6.5.1. Placer sur l’axe optique le foyer objet F.
6.5.2. Indiquer les valeurs de $\overline{OF}$, $\overline{OF'}$ et $\overline{OA}$.
6.5.3. Prolonger les rayons émergents de B et construire l’image A’B’ de l’objet AB.
6.5.4. Préciser la nature (réelle ou virtuelle) de cette image. Justifier la réponse.

Rappels : Formule de conjugaison : $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}}$;

Formule du grandissement : $\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$; Vergence : $C = \dfrac{1}{f}$; distance focale : $f = \overline{OF'}$

Exercice 7 : Couleurs de l'écusson. (3 points)

L'écusson est de couleur rouge et blanc.

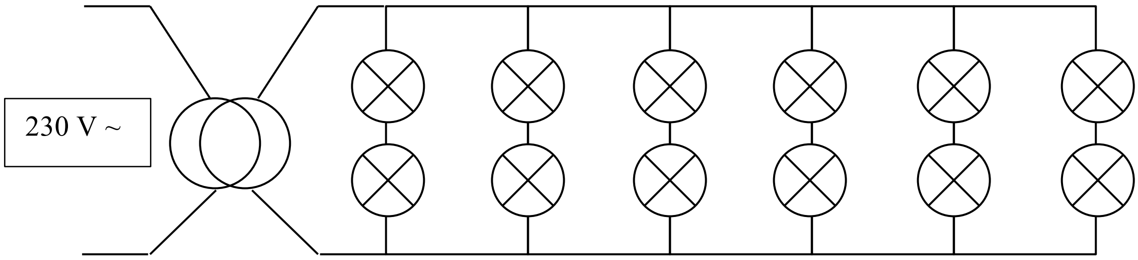
Pour l'éclairage de sa fresque qui représente l'écusson une lampe à LED qui change de couleurs est utilisée.

Les couleurs apparaissent dans l'ordre suivant : blanc, rouge, bleu et jaune.

7.1. Compléter, sur l'annexe 2, le tableau avec les couleurs de l'écusson correspondantes.

Exercice 8 : Eclairage de la fresque. (5 points)

Pour optimiser l'éclairage de sa fresque, le président dispose de 12 spots halogène d'une puissance de 40 watts chacun, d'une tension nominale de 24 V et montés en dérivation 2 par 2.



8.1. Pour quelle raison privilégie-t-on le montage en dérivation à celui de tout en série ?

8.2. Peut-on alimenter directement deux spots à la prise du secteur EDF ? Justifier la réponse.

8.3. Pour alimenter les spots un transformateur est nécessaire.

Parmi les trois transformateurs 230V/24V ou 230V/48V ou 230V/12V ; lequel est le plus adapté ? Justifier la réponse.

8.4. Quel appareil de mesure utilise-t-on pour vérifier la valeur de la tension au secondaire du transformateur ? Représenter cet appareil par son symbole normalisé sur le schéma en annexe 2.

8.5. Calculer, en watt, la puissance consommée par les 12 spots.

8.6. Pour protéger l'installation trois fusibles sont disponibles 8 A, 10 A et 16 A.

Lequel est le plus adapté ? Justifier le choix par un calcul.

Données : $P = U \cdot I$

Exercice 9 : L'enduit à la chaux (7 points)

<u>Préparation de la chaux éteinte.</u>

Pour réaliser de l'enduit à la chaux, on utilise de la chaux éteinte.

9.1. A l'aide de la documentation proposée en annexe 4, écrire l'équation équilibrée de la réaction d'hydratation de la chaux vive.

9.2. La masse molaire de l'oxyde de calcium est $M_{CaO} = 56$ g/mol.

Calculer la masse molaire moléculaire de l'hydroxyde de calcium notée $M_{Ca(OH)_2}$.

9.3. Déterminer la quantité de chaux vive nécessaire pour produire 50 kg de chaux éteinte.

Données :

Elément	Masse molaire g/mol
Hydrogène : H	1
Carbone : C	12
Oxygène : O	16
Calcium : Ca	40

Propriété du lait de chaux.

Le lait de chaux est une solution saturée en hydroxyde de calcium. Il est utilisé dans la fabrication des enduits à la chaux.

9.4. Relever sur l'étiquette l'information nécessaire à la détermination de la nature acide, basique ou neutre de la solution.

9.5. Proposer une méthode expérimentale permettant de vérifier cette information.

9.6. Quelles précautions doit-on prendre lors de la manipulation du lait de chaux ?

Exercice 10 : Eclairage du flacon (8 points)

Le flacon est éclairé par un spot émettant de la lumière blanche. On observe alors, une bande de couleurs vives et intenses sur un mur de la salle.

10.1. Donner une explication du phénomène observé et nommer six couleurs obtenues.

Le flacon est éclairé par un faisceau monochromatique de couleur rouge.

10.2. Quel dispositif permet d'obtenir un tel faisceau lumineux ?

L'indice de réfraction de la résine constituant le prisme est $n_2 = 1,5$, celui de l'air est $n_1 = 1$.

Le rayon lumineux arrive perpendiculairement à une face MN au point K_1 du prisme (annexe 3).

10.3. Expliquer pourquoi le rayon lumineux pénètre dans le prisme sans être dévié.

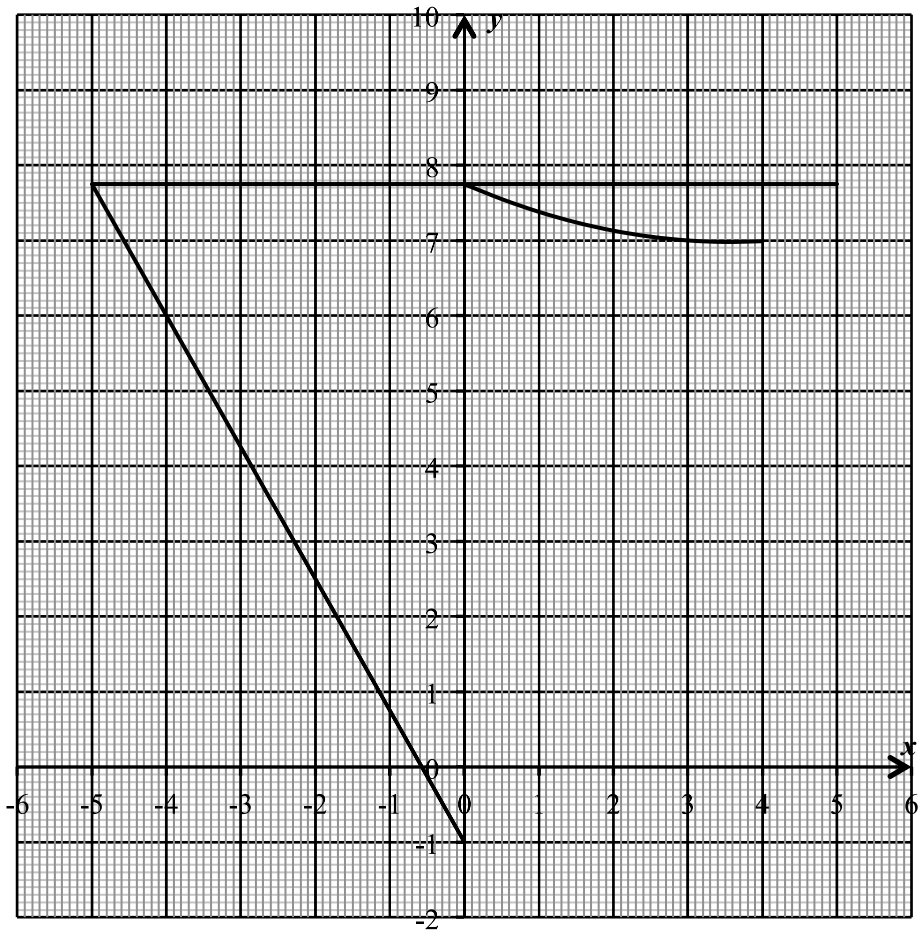
10.4. Calculer la valeur λ de l'angle limite de réfraction à la surface de séparation NP en utilisant la relation $\sin\lambda = \frac{n_1}{n_2}$. Arrondir le résultat au dixième.

10.5. En utilisant les propriétés géométriques du triangle MNP vérifier que la valeur de l'angle d'incidence $r' = 60°$.

10.6. On vérifie que $r' > \lambda$, quel phénomène peut-on alors observer ? Tracer dans ce cas le rayon émergent sur le schéma de l'annexe 3.

Annexe 1 (à rendre avec la copie)

Repère



Exercice 2 :

Tableau de variations de la fonction *f* :

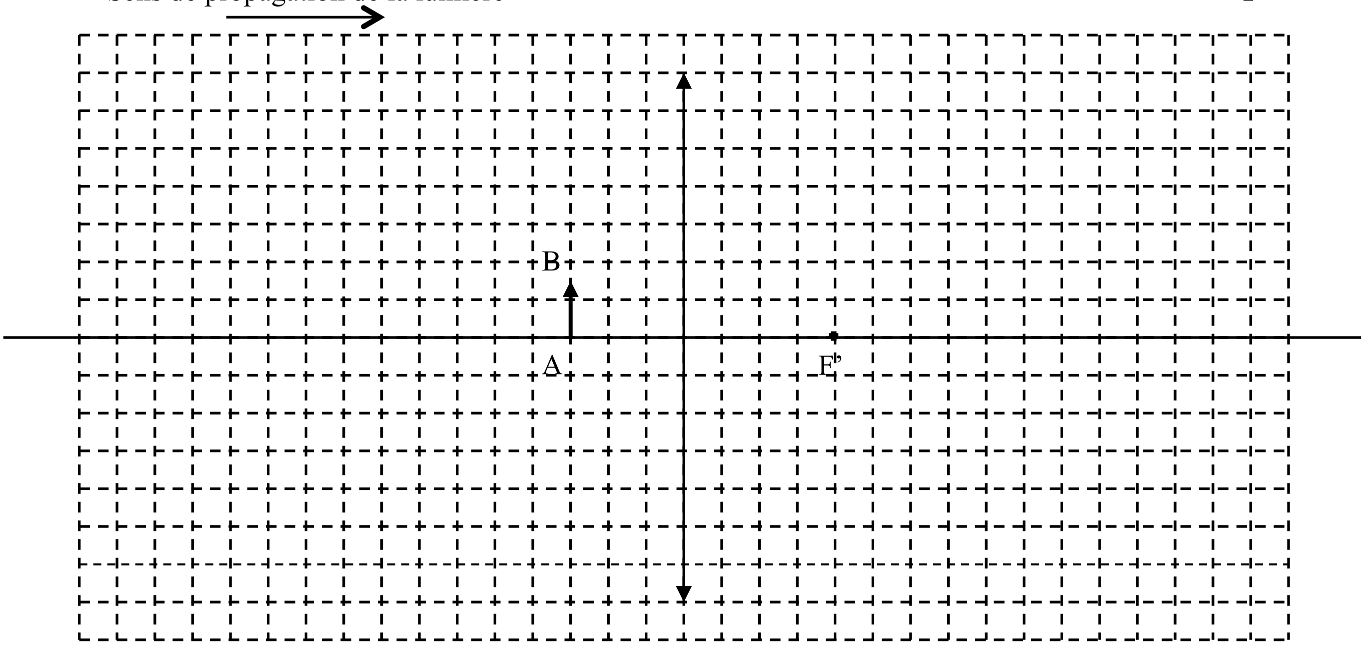
x	
Signe de *f'(x)*	
Variations de *f*	

Tableau de valeurs de la fonction *f* :

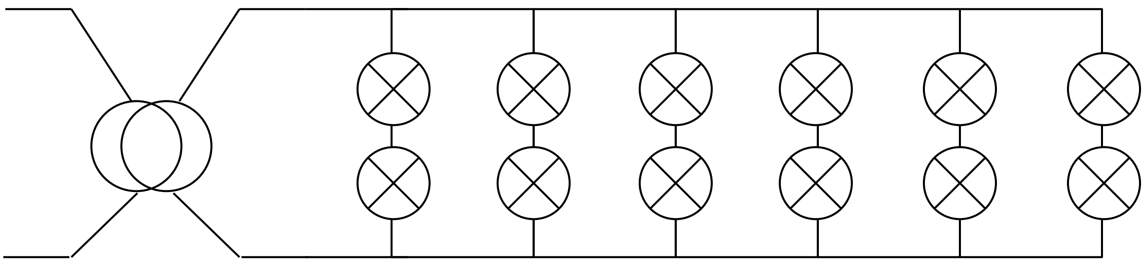
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
f(*x*)	0								

Annexe 2 (à rendre avec la copie)

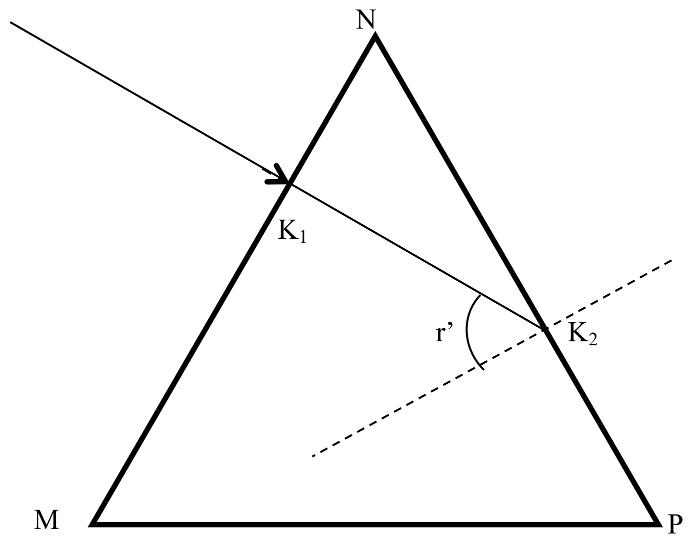
Sens de propagation de la lumière



Couleur de la LED	Couleurs de l'écusson	
Blanc	Rouge	Blanc
Rouge		
Bleu		
Jaune		

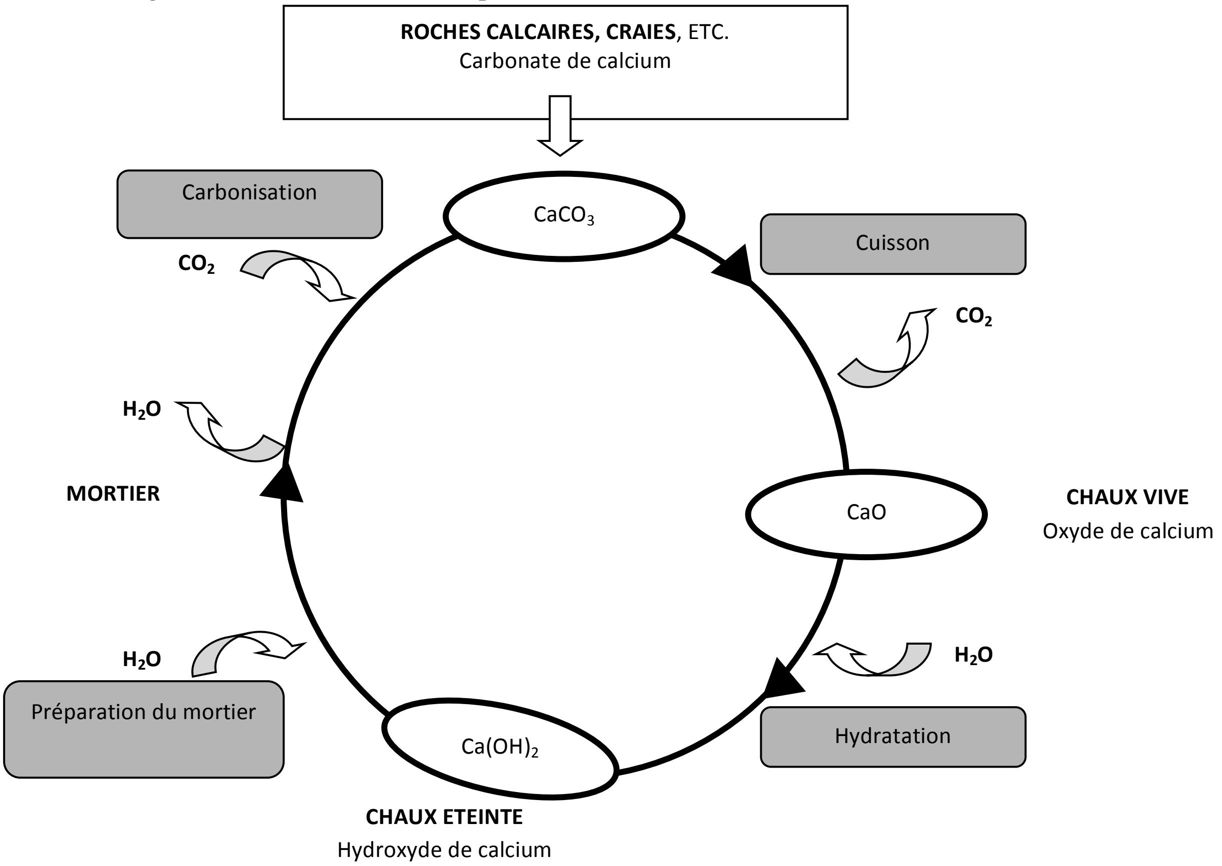


Annexe 3 (à rendre avec la copie)



La chaux dans tous ses états

Les premières traces de la fabrication organisée de la chaux remontent à 10 000 ans avant J.C. en Mésopotamie. La plupart des peuples de l'Antiquité connaissaient la chaux.
Elle était utilisée comme liant dans les constructions et servait dans la fabrication d'enduits ou la réalisation de fresques à la chaux aérienne, issue d'un calcaire très pur.
On utilise de nos jours des produits « solutions » à base de chaux. Nous pouvons citer le ***lait de chaux*** pour la peinture « badigeon à la chaux » et les fresques.



Hydroxyde de calcium	
IDENTIFICATION DES DANGERS	
Indication du danger	**Xi Irritant**.
Phrases de risques	**R38 Irritant pour la peau** **R41 Risque de lésions oculaires graves**
Avertissement complémentaire	Le produit peut provoquer chez l'homme des dommages cutanés sévères (brûlures alcalines), particulièrement en cas de contact prolongé avec la peau.
Composition	Suspension d'hydroxyde de calcium (substance active) dans de l'eau.
PROPRIETES PHYSIQUES ET CHIMIQUES	
Informations importantes relatives à la santé, la sécurité et à l'environnement	
pH	12,4 à 25°C pour une solution saturée de $Ca(OH)_2$
Solubilité dans l'eau	1850 mg/Là 0°C 1650 mg/L à 20°C 770 mg/L à 100°C
Autres informations	
Point de fusion	Pour la substance active $Ca(OH)_2$: décomposition à 580°C, pour former CaO et H_2O
Point d'ébullition	100 °C
Masse volumique absolue	2,24 g/cm³ à 20°C pour la substance active $Ca(OH)_2$

FORMULAIRE

Fonction f	**Dérivée f'**
$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$a\,u(x)$	$a\,u'(x)$

Logarithme népérien : ln

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln(a^n) = n \ln a$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Equation du second degré $ax^2+bx+c=0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

- Si $\Delta = 0$, une solution réelle double :

$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

- Si $\Delta < 0$, aucune solution réelle

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Suites arithmétiques

Terme de rang 1 : u_1 et raison r

Terme de rang n : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Somme des k premiers termes :

$S_k = u_1 + u_2 + ... + u_k = \frac{k(u_1+u_k)}{2}$

Suites géométriques

Terme de rang 1 : u_1 et raison q

Terme de rang n : $u_n = u_1 . q^{n-1}$

Somme des k premiers termes :

$S_k = u_1 + u_2 + ... + u_k = u_1 \frac{1-q^k}{1-q}$

Trigonométrie

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

$= 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

Statistiques

Effectif total $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$

Moyenne $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N}$

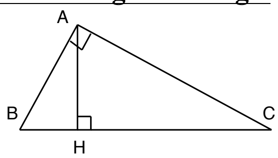
Variance $V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$

Ecart type $\sigma = \sqrt{V}$

Relations métriques dans le triangle rectangle

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

$AH \times BC = AB \times AC$



$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$; $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$; $\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$

Résolution de triangle

$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$

R : rayon du cercle circonscrit

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

Aires dans le plan

Triangle : $\frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$

Trapèze : $\frac{1}{2}(B+b)h$

Disque : πR^2

Aires et volumes dans l'espace

Cylindre de révolution ou prisme droit d'aire de base B et de hauteur h : Volume Bh

Sphère de rayon R : Aire : $4\pi R^2$; Volume : $\frac{4}{3}\pi R^3$

Cône de révolution ou pyramide de base B et de hauteur h : Volume $\frac{1}{3}Bh$

Calcul vectoriel dans le plan - dans l'espace

$\vec{v}.\vec{v}' = xx' + yy'$	$\vec{v}.\vec{v}' = xx' + yy' + zz'$
$\lVert\vec{v}\rVert = \sqrt{x^2+y^2}$	$\lVert\vec{v}\rVert = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}' \neq \vec{0}$

$\vec{v}.\vec{v}' = \lVert\vec{v}\rVert \times \lVert\vec{v}'\rVert \cos(\vec{v}, \vec{v}')$

$\vec{v}.\vec{v}' = 0$ si et seulement si $\vec{v} \perp \vec{v}'$