BTS GÉOMÈTRE TOPOGRAPHE

MATHÉMATIQUES

SESSION 2016

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

Matériel autorisé :
- Toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante (Circulaire n°99-186, 16/11/1999).

Documents à rendre avec la copie :
- Annexe 1 .... page 5/6
- Annexe 2 .... page 6/6

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet se compose de 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.

<u>Exercice 1</u> (10 points)

PARTIE A : Étude d'une courbe du plan.

Le plan (xOy) est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On considère la courbe (L_1) définie par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \qquad t \text{ décrivant } \mathbf{R}.$$

1. Montrer que l'on peut restreindre l'étude de la courbe (L_1) à l'intervalle $[0\,;\pi]$
   On précisera la transformation géométrique à utiliser.

2. Exprimer $x(\pi - t)$ et $y(\pi - t)$ respectivement en fonction de $x(t)$ et $y(t)$.
   En déduire un nouvel intervalle d'étude et la transformation géométrique à utiliser.

3. Etudier les variations des fonctions x et y sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
   Dresser le tableau des variations.

On note A, B et C les points de la courbe (L_1) de paramètres respectifs 0, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.

4. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des tangentes à la courbe (L_1) aux points A, B et C.

5. Dans le repère orthonormé fourni en annexe 1, construire la courbe (L_1).
   On veillera à placer les points A, B et C et à représenter les tangentes en ces points.

PARTIE B : Étude d'une courbe de l'espace.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

On considère la courbe (L) définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \\ z(t) = \sin(t) \end{cases} \qquad t \text{ décrivant } \mathbf{R}.$$

1. a) Calculer $[x(t)]^2 + [z(t)]^2$.
   b) En déduire que la courbe (L) est tracée sur un cylindre dont on précisera l'axe et le rayon.
   c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe (L_2) obtenue par projection de la courbe (L) sur le plan (xOz).

2. Justifier que la courbe (L_1) de la partie A est obtenue par projection de la courbe (L) dans le plan (xOy).

3. A partir de la représentation graphique obtenue sur la calculatrice, tracer sur l'annexe 1, à rendre avec la copie, l'allure de la courbe (L_3) obtenue par projection de la courbe (L) dans le plan (yOz). Aucune justification n'est demandée.

<u>Exercice 2</u> (10 points)

PARTIE A : Trigonométrie sphérique

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

Sur la sphère de centre O et de rayon 100, on considère les points A, B et C définis par leur longitude θ et leur latitude φ :

$A(\theta_A = 0\ ;\ \varphi_A = 0)$, $B\left(\theta_B = 0\ ;\ \varphi_B = \frac{\pi}{6}\right)$ et $C\left(\theta_C = \frac{\pi}{4}\ ;\ \varphi_C = 0\right)$

On rappelle les formules de base de la trigonométrie sphérique, avec les notations usuelles, et en posant $a = \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$, $b = \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ *et* $c = \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ *:*

- $\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos \hat{A}$
- $\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{C}}$
- *Aire d'un triangle sphérique :* $\left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi\right) \times R^2$

1. Placer les points A, B et C sur la sphère fournie en annexe 2, puis tracer le triangle sphérique ABC.

2. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A, B et C.

3. Déterminer les valeurs exactes des angles b et c ainsi que celle de l'angle $\hat{A}$ du triangle sphérique ABC.

4. a) Montrer que $\cos a = \frac{\sqrt{6}}{4}$.
   b) En déduire une valeur approchée à 0,01 près de a en radian et de l'arc BC en unité de longueur.

5. Calculer les mesures des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$, arrondis au centième de radian.

6. Calculer l'aire du triangle sphérique à l'unité d'aire près.

PARTIE B : Vrai ou faux.

Pour chacune des situations suivantes, on a formulé une affirmation. Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant. Une réponse non justifiée n'apporte pas de point. Toute argumentation pertinente, même partielle, sera valorisée.

Situation 1 :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère le plan P d'équation $2x - 3y + 2z - 1 = 0$ et les points $A(1; 2; 0)$ et $B(1; 0; 0)$.

Affirmation 1
« La droite (AB) est sécante avec le plan P.»

Situation 2 :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère la sphère Σ de centre O et de rayon 1. On appelle I l'inversion de pôle $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$ et de puissance 2.

Affirmation 2
« L'inverse de la sphère Σ par I est un plan passant par O.»

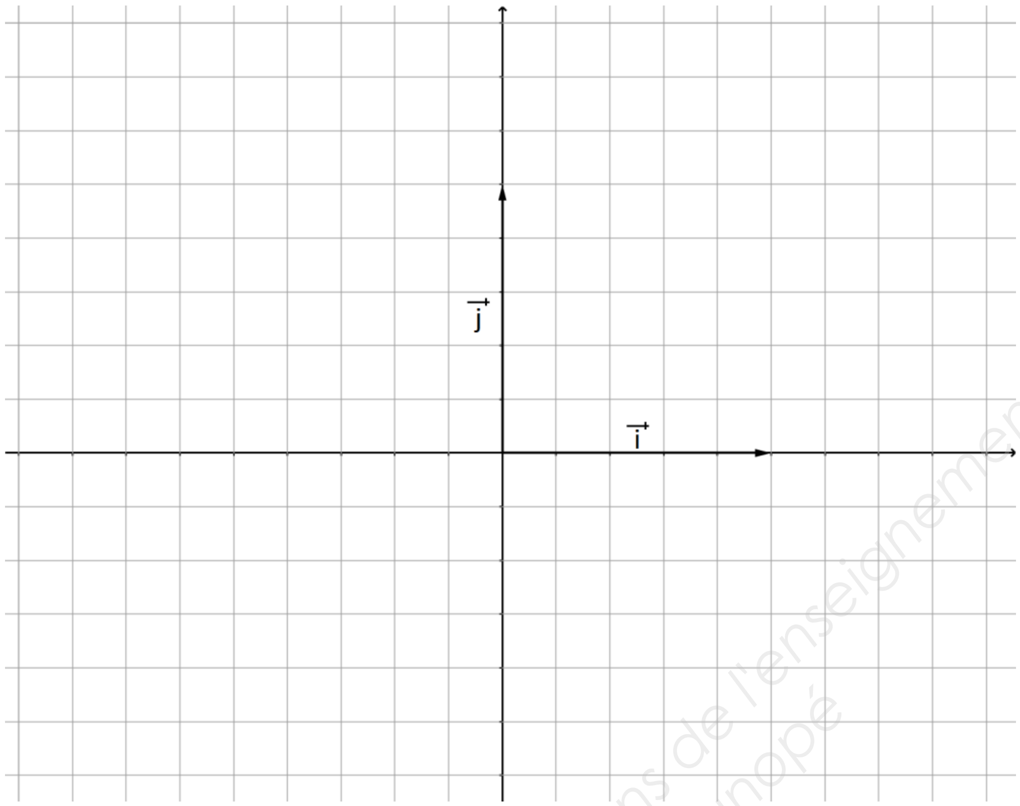
Situation 3 :

Dans un repère orthonormé direct du plan, on considère la courbe Γ définie par son équation polaire : $\rho(\theta) = (1 - \sin\theta).\cos\theta$ où $\theta \in \mathbb{R}$

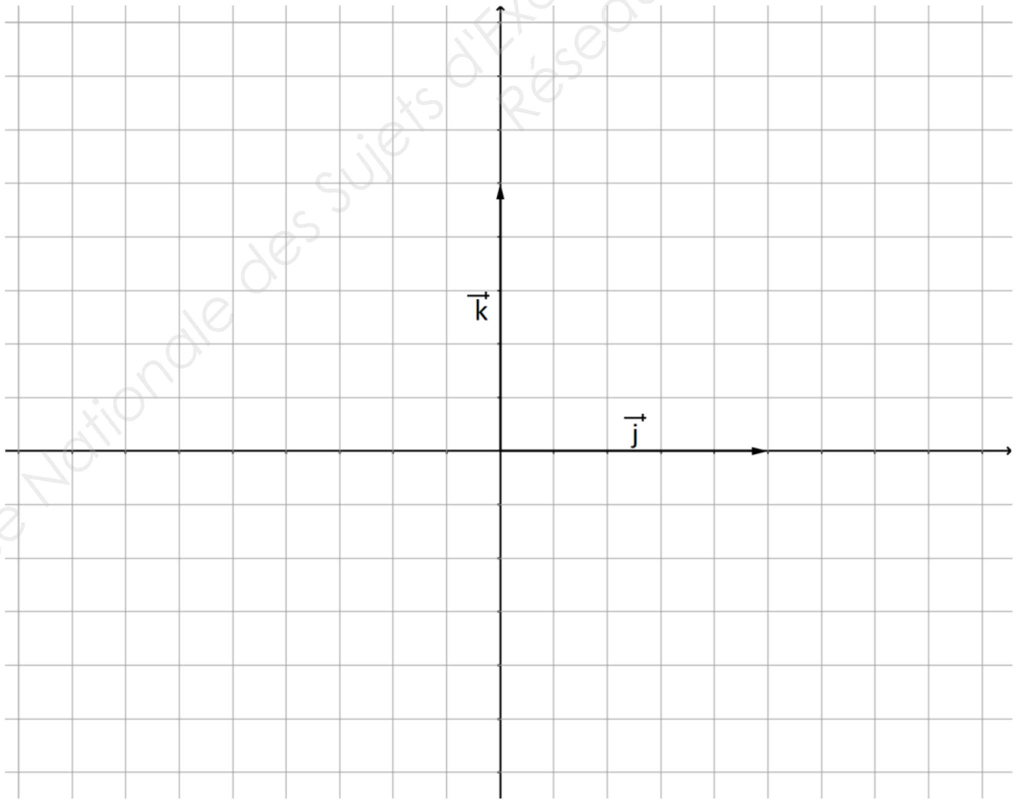
Affirmation 3
« La courbe Γ admet une tangente horizontale au point de paramètre $\theta = 0$»

ANNEXE 1

Exercice 1 Partie A



Exercice 1 Partie B



ANNEXE 2

Exercice 2 :
Partie A