BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Session 2017

Durée : 3 heures

Coefficient : 2

Calculatrice autorisée.

Documents à rendre avec la copie :

Les **deux documents réponses** numérotés 6/7 et 7/7.

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 7 pages, numérotées de 1/7 à 7/7.

EXERCICE 1 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on définit les point A, B et C par leurs coordonnées :

$$\mathrm{A}(3; 0; 0),\ \mathrm{B}(0; -6; 0) \text{ et } \mathrm{C}(0; 2; 4)$$

1. a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

   b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

   c) En déduire une valeur arrondie au dixième de degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

2. a) Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

   b) En déduire, en unité d'aire, l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 2 (9 points)

Dans un souci de rentabilité, un fabricant de guitare classique souhaite effectuer la découpe de certaines pièces de bois de façon automatique par une machine à commande numérique.

La face avant de la caisse, appelée table, est découpée dans une plaque de bois plane. L'objectif de cet exercice est d'obtenir le contour de cette table à l'échelle 1/5, à l'aide de 2 courbes de Bézier $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

On note L la largeur maximale de la table, telle qu'indiquée sur le schéma.

La courbe $\mathcal{C}_1$ tracée **sur le document réponse 1 à rendre avec la copie** est la courbe de Bézier associée aux quatre points de contrôle successifs :

$$\mathrm{A}(0\,;4)\,;\ \mathrm{B}(-4\,;4)\,;\ \mathrm{C}(-2\,;1) \text{ et } \mathrm{D}(-2\,;0).$$

La courbe $\mathcal{C}_2$ (non tracée) est la courbe de Bézier associée aux quatre points de contrôle successifs :

$$\mathrm{D}(-2\,;0)\,;\ \mathrm{E}(-2\,;-2)\,;\ \mathrm{F}(-6\,;-7) \text{ et } \mathrm{G}(0\,;-7).$$

Les parties A, B et C sont indépendantes. La partie D utilise la partie C.

Partie A – Raccordement des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$

On admet que les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se raccordent au point D.

Prouver que les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont même tangente en ce point. Tracer cette tangente **sur le document réponse 1 à rendre avec la copie**.

Partie B – Construction d'un point de la courbe $\mathcal{C}_2$

Pour chaque valeur t appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, l'algorithme de construction par barycentres successifs, appelé algorithme de De Casteljau, permet de construire le point $\mathrm{M}_2(t)$ de paramètre t de la courbe de Bézier $\mathcal{C}_2$.
Utiliser cet algorithme pour la valeur $t = \frac{3}{4}$ et placer sur **le document réponse 1 à rendre avec la copie** le point $\mathrm{M}_2\left(\frac{3}{4}\right)$ de $\mathcal{C}_2$. Laisser les traits de construction apparents.

Partie C – Tracé de la courbe $\mathcal{C}_2$

La courbe de Bézier $\mathcal{C}_2$ associée aux quatre points de contrôle successifs $\mathrm{D}(-2\,;0)$; $\mathrm{E}(-2\,;-2)$; $\mathrm{F}(-6\,;-7)$ et $\mathrm{G}(0\,;-7)$ est l'ensemble des points $\mathrm{M}_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}_2(t)} = B_0(t)\overrightarrow{\mathrm{OD}} + B_1(t)\overrightarrow{\mathrm{OE}} + B_2(t)\overrightarrow{\mathrm{OF}} + B_3(t)\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

où $t \in [0;1]$ et les fonctions $B_i(t)$ sont les polynômes de Bernstein de degré 3 donnés par :

$$B_i(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}.$$

On rappelle que les nombres $\binom{3}{i}$ sont des coefficients binomiaux qui peuvent être obtenus à la calculatrice ou par la formule $\binom{3}{i} = \frac{3!}{i!(3-i)!}$.

1. Montrer que $B_1(t) = 3t^3 - 6t^2 + 3t$.

Dans la suite, on admet que $B_0(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1$, $B_2(t) = -3t^3 + 3t^2$ et $B_3(t) = t^3$.

2. a) La représentation paramétrique de la courbe $\mathcal{C}_2$ est $\begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \end{cases}$

   Montrer que $f_2(t) = 14t^3 - 12t^2 - 2$.

   On admet que $g_2(t) = 8t^3 - 9t^2 - 6t$.

   b) Étudier les variations de la fonction f_2 sur l'intervalle $[0\,;1]$ et compléter le tableau des variations conjointes de f_2 et g_2 situé sur **le document réponse 2 à rendre avec la copie**. On arrondira si nécessaire les valeurs au dixième.
   Les résultats concernant la fonction g_2 donnés dans le tableau n'ont pas à être justifiés et peuvent être utilisés par la suite.

3. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point $\mathrm{M}_2\left(\frac{4}{7}\right)$, puis au point $\mathrm{M}_2(1)$.

4. a) Tracer sur **le document réponse 1 à rendre avec la copie** les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_2$ aux points $\mathrm{M}_2\left(\frac{4}{7}\right)$ et $\mathrm{M}_2(1)$.

   b) Tracer la courbe $\mathcal{C}_2$ sur **le document réponse 1 à rendre avec la copie**.

Partie D – Fin de la construction

1. Tracer les courbes $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$, respectivement symétriques des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Donner une représentation paramétrique de la courbe $\mathcal{C}_4$.

3. On admet que le graphique du **document réponse 1** est à l'échelle 1/5 et que l'unité graphique est de 1 cm. Quelle est la largeur maximale L de la table de la guitare ?

EXERCICE 3 (6 points)
Un formulaire est fourni en fin d'exercice.

Contexte : Une entreprise fabrique par moulage des paraboles pour réception satellitaire en matériau composite. Ce matériau est disposé dans un moule à une température de 140 °C (degrés Celsius), puis pressé.
On pose $t = 0$ à l'instant où la parabole est retirée du moule. Elle a alors une température de 140 °C. On la dépose à l'air libre à la température ambiante de 20 °C afin qu'elle refroidisse.

On note $f(t)$ la température de la parabole, en degrés Celsius à l'instant *t*, exprimée en secondes.

D'après la loi de refroidissement de Newton, la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ d'expression $f(t)$ est solution de l'équation différentielle (E) : $y'(t) + 0{,}004\, y(t) = 0{,}08$ où l'inconnue y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

Partie A – Résolution d'une équation différentielle

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y'(t) + 0{,}004\, y(t) = 0$.

2. Déterminer une fonction constante solution de l'équation différentielle (E) :
$$y'(t) + 0{,}004\, y(t) = 0{,}08.$$

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. On rappelle que $f(0) = 140$. En déduire l'expression de $f(t)$ pour $t \in [0\,;+\infty[$.

Partie B – Étude d'une fonction

Dans cette partie, on admet que $f(t) = 120\mathrm{e}^{-0{,}004t} + 20$ pour $t \in [0\,;+\infty[$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

   b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

3. Au cours du refroidissement, il arrive que la parabole doive subir des rectifications et des contrôles. Ceux-ci ne peuvent être effectués que lorsque la température de la parabole est inférieure à 30 °C.
   a) Justifier qu'il existe un instant t_1 à partir duquel la température se maintient en dessous de 30 °C.

   b) Pour déterminer une valeur possible pour t_1, on utilise l'algorithme suivant :
```
Variable : t entier
Traitement :
t prend la valeur 0
Tant que f(t)>30
   t prend la valeur t+1
Fin du tant que
Afficher t
```
   Justifier que l'algorithme s'arrête.

   c) En utilisant la méthode de votre choix, déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme.

FORMULAIRE

Équation différentielle d'ordre 1

Les solutions de l'équation différentielle homogène $(E_0) : ay'(t) + by(t) = 0$ sont les fonctions y définies sur un intervalle I par :

$$y(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}, \text{ avec } k \text{ constante réelle.}$$

Formule de dérivation

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et on a :

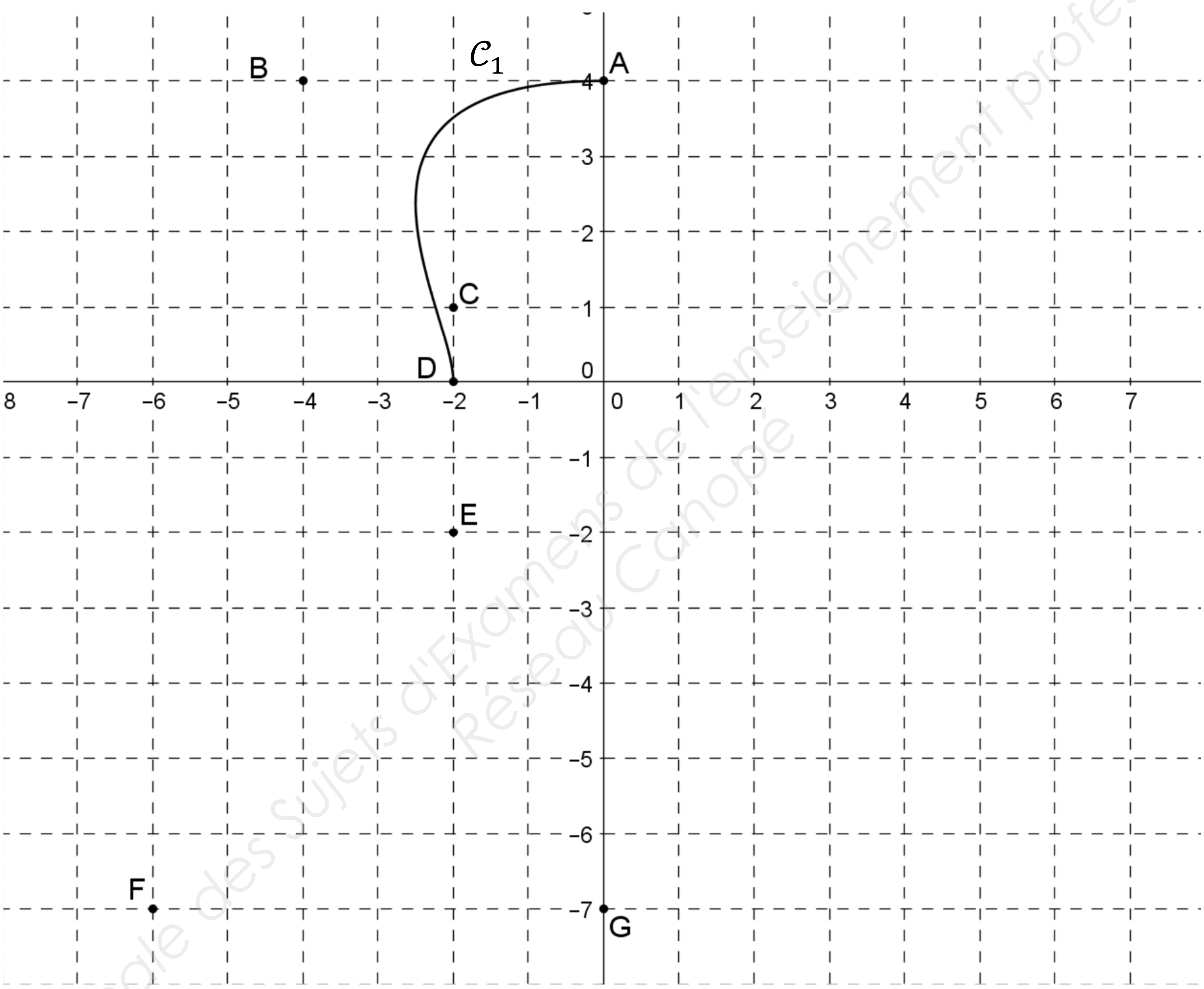
$$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$$

Modèle CMEN-DOC v2 A4 ©NEOPTEC	
Nom de famille : (Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)	
Prénom(s) :	
Numéro Inscription :	Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

DOCUMENT RÉPONSE 1

GRAPHIQUE : Exercice 2



Modèle CMEN-DOC v2 A4 ©NEOPTEC

Nom de famille : (Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Inscription :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

DOCUMENT RÉPONSE 2

Tableau des variations conjointes de f_2 et g_2 (Exercice 2 partie C)

t	0	$\frac{4}{7}$	1
$f_2'(t)$			
$f_2(t)$			
$g_2(t)$	0	$-4{,}9$	-7
$g_2'(t)$	-6	$-$	0