BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2017

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT E **_CODE : MATGRE_**

Durée : 1 h 30

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENTS
CONCEPTEUR EN ART ET INDUSTRIE CÉRAMIQUE	1,5
DESIGN DE COMMUNICATION ESPACE ET VOLUME	1,5
DESIGN D'ESPACE	1,5
DESIGN DE PRODUITS	1,5

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le sujet comporte 2 annexes à rendre avec la copie :

Annexe 1 .... page 5/6
Annexe 2 .... page 6/6

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (10 points)

La boîte de nuit « Le cube » a besoin d'entreprendre des travaux de rénovation de ses locaux. Le bâtiment est constitué d'un cube tronqué, représenté sur les schémas ci-dessous. La partie hachurée sur la figure 2 est une verrière.

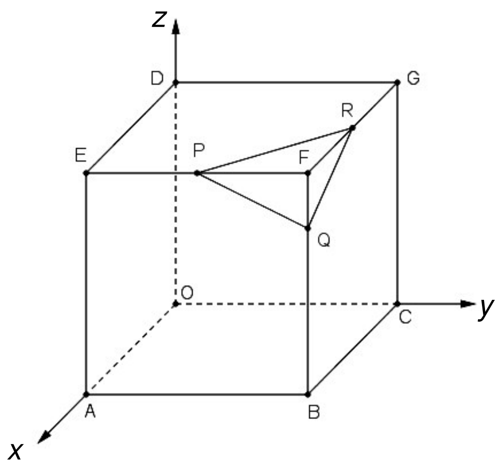


Figure 1

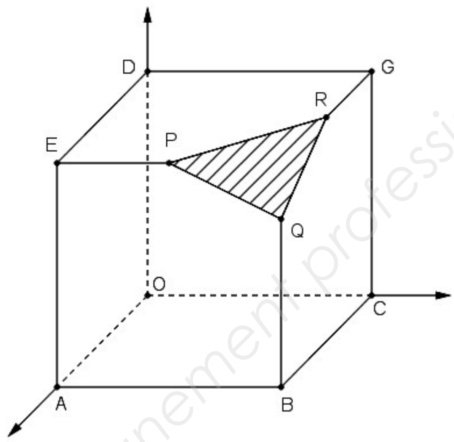


Figure 2

L'objectif de cet exercice est d'étudier les propriétés de la verrière dans le cadre de sa rénovation puis de représenter le bâtiment en perspective afin de préparer un prospectus publicitaire en vue de la réouverture à l'issue des travaux.

Description de l'objet :

- l'arête du cube mesure 24 m ;
- P est le milieu de [EF], R est le milieu de [FG] ;
- Q est le point de [BF] vérifiant $FQ = \frac{1}{4} FB$.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : Étude de la verrière

1° a) Démontrer que $PR = 12\sqrt{2}$ et que $PQ = QR = 6\sqrt{5}$ (l'unité de longueur est le mètre).

b) Représenter la verrière, c'est-à-dire le triangle PQR, à l'échelle 1/200.

2° L'espace est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J, K) où I, J et K sont les points situés respectivement sur les segments [OA], [OC] et [OD] tels que OI = OJ = OK = 1 m.

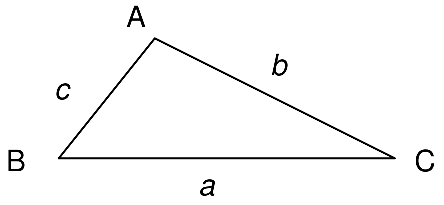
a) Donner les coordonnées de P, Q et R lues sur la figure 1.

b) Vérifier que $\overrightarrow{PQ}\,(0, 12, -6)$ et $\overrightarrow{PR}\,(-12, 12, 0)$.

c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$.

d) En déduire la valeur approchée de l'angle $\widehat{QPR}$ arrondie au dixième de degré.

3° On rappelle la formule suivante.



L'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC est donnée par : $\mathscr{A} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$

En utilisant l'arrondi précédent, déterminer l'aire de la verrière (donner le résultat en m^2, arrondi au dixième).

Partie B : Représentation en perspective

La représentation en perspective centrale du bâtiment est commencée en annexe 1. Trois arêtes du cube y sont représentées, ainsi que la ligne d'horizon avec comme plan frontal le plan (AEB). On note a, b, c, d, e, f, g, o, p, q, r les images respectives des points A, B, C, D, E, F, G, O, P, Q, R dans cette représentation en perspective centrale.

1° Compléter soigneusement la représentation en perspective centrale en annexe 1, en laissant apparents les traits de construction.

2° On note e et d les images respectives de E et D dans la représentation en perspective.
Comment s'appelle le point d'intersection de la droite (ed) et de la ligne d'horizon ? Justifier.

EXERCICE 2 (10 points)

Un designer décide de concevoir une chaise longue adaptée au profil du corps humain. Pour cela, il va modéliser la chaise à l'aide de deux courbes de Bézier, C_1 pour l'assise et C_2 pour la base.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $P_0(0, 9)$; $P_1(5, -5)$; $P_2(9, 8)$ et $P_3(12, 1)$.
La courbe de Bézier C_1 définie par ces quatre points de contrôle est tracée sur la figure donnée en annexe 2. Sur cette courbe est placé le point A utilisé à la question 6°.

1° Placer les points P_0, P_1, P_2 et P_3 sur la figure donnée en annexe 2.

2° Quelle(s) tangente(s) à la courbe C_1 peut-on connaître sans effectuer aucun calcul ? Justifier la réponse.

3° Pour créer la base de cette chaise, le designer considère la courbe de Bézier C_2 définie par les points de contrôle $P_0(0, 9)$; $P_4(1, -3)$ et $P_3(12, 1)$. Cette courbe est l'ensemble des points $M(t)$ tels que, pour tout t de l'intervalle $[0, 1]$:

$$\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)^2\,\overrightarrow{OP_0} + 2t(1-t)\,\overrightarrow{OP_4} + t^2\,\overrightarrow{OP_3}.$$

a) Démontrer que les coordonnées x et y des points $M(t)$ de la courbe C_2 ont pour expression : $x = f(t) = 10\,t^2 + 2\,t$ et $y = g(t) = 16\,t^2 - 24\,t + 9$.

b) Étudier les variations des fonctions f et g définies pour t dans l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$f(t) = 10\,t^2 + 2\,t \quad \text{et} \quad g(t) = 16\,t^2 - 24\,t + 9.$$

Rassembler les résultats dans un tableau unique.

4° a) *Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
La courbe C_2 admet au point obtenu pour $t = 0$, une tangente de vecteur directeur :

$17\,\vec{i}$	$9\,\vec{j}$	$\vec{i} - 12\,\vec{j}$	$-24\,\vec{i} + 9\,\vec{j}$

b) Les courbes C_1 et C_2 ont-elles la même tangente au point P_3 ? Justifier.

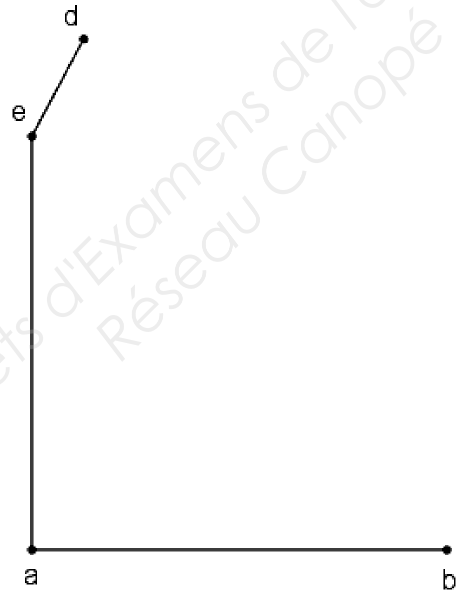
5° Sur le graphique de l'annexe 2 :

– tracer les tangentes à C_2 aux points obtenus pour $t = 0$, $t = \dfrac{3}{4}$ et $t = 1$;

– tracer la courbe C_2.

6° Pour éviter le basculement, la chaise doit respecter une contrainte.
On considère le point A qui a été placé sur la courbe C_1 (voir annexe 2). On admet que la tangente en A à la courbe C_1 est horizontale et que l'abscisse de A est environ 5,46.
On considère le point B de la courbe C_2 en lequel la tangente est horizontale.
L'écart entre les abscisses de A et B ne doit pas dépasser 1,8. Cette contrainte est-elle respectée ?

ANNEXE 1 À RENDRE AVEC LA COPIE



Modèle CMEN-DOC v2 A4 ©NEOPTEC

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Inscription :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

ANNEXE 2 À RENDRE AVEC LA COPIE