BTS GÉOMÈTRE TOPOGRAPHE

MATHÉMATIQUES

SESSION 2017

Durée : 2 heures

Coefficient : 2

Matériel autorisé :

- Toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante (Circulaire n°99-186, 16/11/1999).

Documents à rendre avec la copie :

- Annexe 1……………………………………………………………………………page 7/8
- Annexe 2……………………………………………………………………………page 8/8

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet se compose de 8 pages, numérotées de 1/8 à 8/8.

EXERCICE 1 : (9 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$. On considère la courbe plane *C* définie par :

$$\begin{cases} x(t) = 2(\cos t)^3 \\ y(t) = 2(\sin t)^3 \end{cases} \quad t \text{ décrivant R.}$$

1. Montrer que les fonctions *x* et *y* sont périodiques de période 2π.
   A quel intervalle peut-on réduire l'étude de la courbe *C* ?

2. Étudier la parité des fonctions *x* et *y* sur l'intervalle [-π ; π].
   Quelle symétrie peut-on en déduire pour la courbe *C* ? A quel intervalle peut-on réduire l'étude de la courbe ?

3. Exprimer $x(\pi - t)$ et $y(\pi - t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe *C* ? A quel intervalle peut-on alors réduire l'étude ?

   On admet de plus que la courbe *C* possède une propriété de symétrie par rapport à la première bissectrice (d'équation $y = x$) et que l'étude peut être réduite sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel on a obtenu les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$:
   $$\begin{cases} x'(t) = -6.\sin t\,.(\cos t)^2 \\ y'(t) = 6.\cos t\,.(\sin t)^2 \end{cases}$$
   Étudier le signe de $x'(t)$ et $y'(t)$ sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et en déduire les variations de x et y sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

5. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à *C* au point A, de paramètre $t = \frac{\pi}{4}$.
   Il est admis que la courbe *C* a pour tangente l'axe $(O\,;\vec{\imath}\,)$ au point M_0 de paramètre $t = 0$.

6. On donne : $x''\left(\frac{\pi}{4}\right) = y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, montrer que le rayon de courbure à la courbe *C* au point A de paramètre $t = \frac{\pi}{4}$ est $R = -3$.
On rappelle que la courbure algébrique au point de paramètre t est donnée par :

$$\frac{1}{R} = \frac{x'y'' - x''y'}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}$$

7. Sur le graphique fourni en annexe 1, placer le point A, tracer les deux tangentes de la question **5.** et le cercle osculateur Γ au point A en plaçant son centre Ω, sans calcul mais en laissant apparaître les éléments nécessaires à la construction.
Tracer avec précision la courbe *C* sur ce même graphique.

EXERCICE 2 : (11 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\ )$.
Soit $\sum$ la sphère de centre O et de rayon 1, représentée en annexe 2.

> *On rappelle les formules de base de la trigonométrie sphérique, avec les notations usuelles où* $a = \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$, $b = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right)$ *et* $c = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ *et* A, B *et* C *sont des points de* $\sum$.
>
> - $cos\ a = cos\ b. cos\ c + sin\ b. sin\ c. cos\ \hat{A}$
> - $\frac{sin\ a}{sin\ \hat{A}} = \frac{sin\ b}{sin\ \hat{B}} = \frac{sin\ c}{sin\ \hat{C}}$
> - *Aire d'un triangle sphérique :* $\left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi\right) \times R^2$

On considère le plan P d'équation $x = y$ et le plan Q d'équation $= \frac{1}{2}$.

L'intersection des plans P et Q est une droite. Cette droite coupe la sphère $\sum$ en deux points A et A_1. On désignera par A celui des deux points dont la longitude est comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

1. Parmi les propositions suivantes, quelles sont les coordonnées sphériques, notées $(r, \theta_{A1}, \varphi_{A1})$, du point A_1 ? Aucune justification n'est attendue.

   a) $\left(1; \frac{\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4}\right)$
   b) $\left(1; \frac{\pi}{6}, \frac{-3\pi}{4}\right)$
   c) $\left(1; \frac{-3\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$
   d) $\left(1; \frac{-3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

2. Déterminer les coordonnées cartésiennes de A_1.

On considère aussi le point B de $\sum$ de longitude comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, intersection du plan P et du plan équateur et le point C de coordonnées sphériques (1, 0, 0).

3. Placer les points A, B et C sur la figure donnée en annexe 2.

On admet ici que les coordonnées cartésiennes des points A, B et C sont :

$$A\begin{pmatrix}\sqrt{6}/4\\ \sqrt{6}/4\\ 1/2\end{pmatrix}, \qquad B\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\\ 0\end{pmatrix}, \qquad C\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

4. Déterminer les coordonnées sphériques des points A et B.

5. Dans cette question, on souhaite déterminer les éléments caractéristiques du triangle sphérique ABC.
   On donne $\widehat{C} \approx 0{,}68$ à 10^{-2} près.
   a. Par lecture graphique déterminer *a*, *c* et $\widehat{B}$.
   b. Vérifier que $b \approx 0{,}91$ à 10^{-2} près.
   c. Montrer que $\widehat{A} \approx 1{,}11$ à 10^{-2} près.

On appelle N le point de Σ de coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On considère l'inversion *I* de pôle N et puissance 4.

6. On note Σ^* la sphère Σ privée du point N.
   L'image de Σ^* par l'inversion *I* est-elle :
   a) une sphère ?
   b) un plan ?
   c) un cercle ?
   d) une droite ?
7. Déterminer une équation cartésienne de l'image de Σ^* par l'inversion *I*.
8. Montrer que l'image A' de A par l'inversion *I* a pour coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ -1 \end{pmatrix}$.
9. On donne les coordonnées cartésiennes des images de B et C par l'inversion *I* :

$$B'\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C'\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   a. Calculer l'aire du triangle sphérique ABC. *On arrondira à 10^{-2} près.*
   b. Calculer l'aire du triangle plan A'B'C'. *On arrondira à 10^{-2} près.*

Modèle CMEN-DOC v2 A4 ©NEOPTEC

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Inscription :

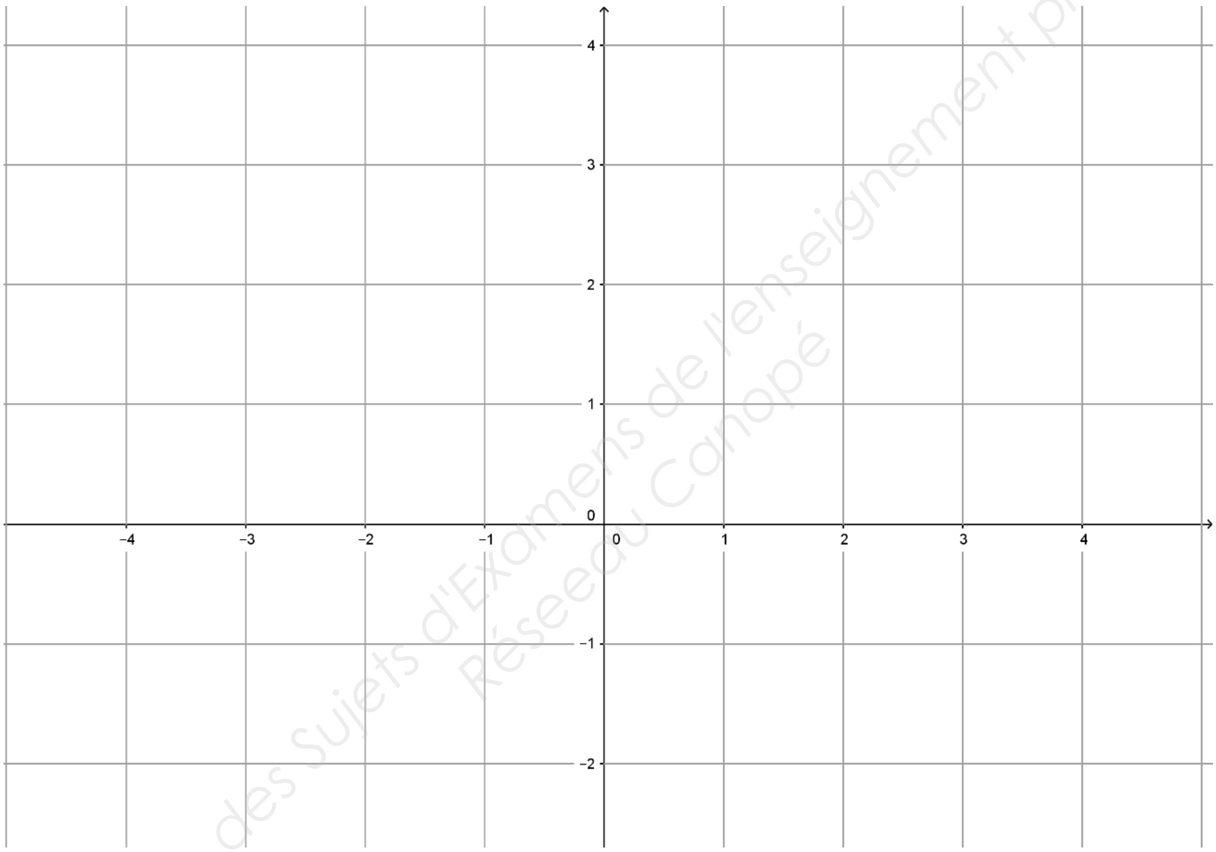
Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

Annexe 1

À rendre avec la copie

Exercice 1 :



Modèle CMEN-DOC v2 A4 ©NEOPTEC	
Nom de famille : (Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)	
Prénom(s) :	
Numéro Inscription :	Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

Annexe 2

À rendre avec la copie

Exercice 2 :