BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
GROUPEMENT A

MATHÉMATIQUES

Session 2018

Durée : 3 heures

SPECIALITES	Coefficient
Électrotechnique	**2**
Systèmes Photoniques	**3**
Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire	**3**

<u>Matériel autorisé :</u>

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

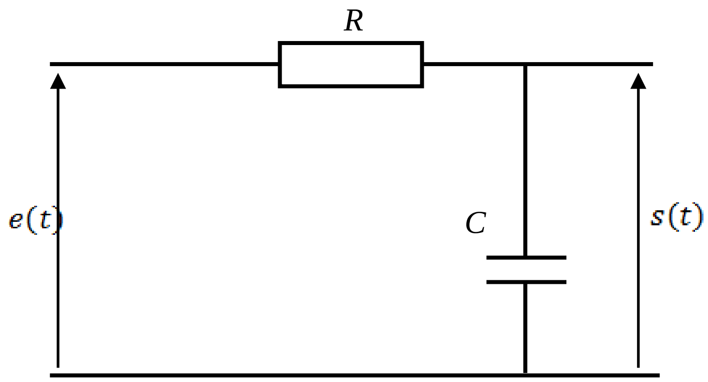
Dès que le sujet vous est remis assurez-vous qu'il est complet
Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.

Le document réponse (pages 7 et 8) est à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 (12 points)

Un système est modélisé par un circuit composé d'une résistance et d'un condensateur en série.
On note R la valeur de la résistance, en ohm, et C la capacité du condensateur, en farad.

$e(t)$ est la tension aux bornes du circuit, exprimée en volt, à l'instant t (en seconde).
$s(t)$ est la tension aux bornes du condensateur, exprimée en volt, à l'instant t (en seconde).



A l'instant $t = 0$ le condensateur est déchargé et on a : $s(0) = 0$.

L'application des lois de la physique conduit, pour tout $t \geq 0$, à la relation : $RCs'(t) + s(t) = e(t)$ qui s'écrit encore : $\tau\, s'(t) + s(t) = e(t)$, avec $\tau = RC$.

Dans tout l'exercice, on suppose que : $\tau = 2$ secondes.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Dans cette partie le circuit est alimenté par une tension constante : $e(t) = e_0 = 6\text{V}$.
On considère l'équation différentielle (E) : $2x'(t) + x(t) = 6$, où l'inconnue x est une fonction dérivable de la variable t, t réel positif.

Des formules concernant les solutions des équations différentielles sont données page 6.

1. Déterminer une solution particulière constante x_0 de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle sans second membre (E_0) : $2x'(t) + x(t) = 0$.

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Justifier que la fonction s vérifie, pour tout $t \geq 0$: $s(t) = 6(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})$

5. La représentation graphique de la fonction est donnée sur **le document réponse (page 7)**.
Pour ce circuit on considère que la tension finale aux bornes du condensateur est de 6V.

a) Que représente cette valeur 6 pour la fonction *s* ? On n'attend pas de justification.

b) Quel pourcentage de la tension finale a-t-on aux bornes du condensateur lorsque $t = 2$? Arrondir ce pourcentage à l'unité.

6. On considère que le condensateur est chargé lorsque la tension à ses bornes atteint 95% de la tension finale. On dit alors que le condensateur est passé en régime permanent.

a) Estimer graphiquement au bout de combien de temps le condensateur est chargé. Faire apparaitre sur le graphique fourni en page 7 les traits nécessaires à la lecture graphique.

b) Déterminer par la méthode de votre choix, que vous préciserez, une valeur approchée au centième de la durée nécessaire pour atteindre le régime permanent.

Partie B

On rappelle que la fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

Dans cette partie, la tension aux bornes du circuit vérifie, pour tout réel t :

$$e(t) = 6\,\mathcal{U}(t) - 6\,\mathcal{U}(t-2).$$

On admet que les fonctions *e* et *s* sont des fonctions causales admettant des transformées de Laplace notées respectivement *E* et *S*.

Des formules utiles au calcul des transformées de Laplace sont données page 6.

1. a) Représenter la fonction *e* dans le repère donné sur **le document réponse (page 7)**.

b) Déterminer $E(p)$.

2. On rappelle que pour *t* différent de 0 et 2 : $2s'(t) + s(t) = e(t)$ et que $s(0) = 0$.

a) Écrire l'égalité obtenue en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'égalité :

$$2s'(t) + s(t) = e(t)$$

b) En déduire que : $S(p) = \frac{6}{p(2p+1)} - \frac{6}{p(2p+1)}\mathrm{e}^{-2p}$

3. On recherche dans cette question l'original de $A(p) = \frac{6}{p(2p+1)}$.

a) Montrer que : $\frac{6}{p(2p+1)} = \frac{6}{p} - \frac{12}{2p+1}$.

b) Comme $\frac{12}{2p+1} = \frac{6}{p+\frac{1}{2}}$, on peut écrire : $A(p) = \frac{6}{p} - \frac{6}{p+\frac{1}{2}}$.
En déduire l'original $a(t)$ de $A(p)$.

4. En remarquant que $S(p) = A(p) - A(p)\mathrm{e}^{-2p}$, déduire des questions précédentes une expression de $s(t)$.

5. On s'intéresse dans cette question à la fonction *s* sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

On admet que pour $t \geq 2 : s(t) = 6(\mathrm{e} - 1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$

a) Étudier les variations de la fonction *s* sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

b) Déterminer la limite de la fonction *s* quand *t* tend vers $+\infty$. Justifier.

6. Sur le **document réponse (page 8)** on a tracé la représentation graphique de la fonction *s* sur l'intervalle [0 ; 2].

a) Compléter la représentation graphique de *s*.

b) Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la représentation graphique de la fonction *s* sur l'intervalle $[0; +\infty[$ obtenue.

EXERCICE 2 (8 points)

Une entreprise utilise deux machines A et B pour produire des composants électroniques.

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Un composant est accepté s'il admet une résistance électrique comprise entre 195 et 205 ohms.
On admet que la variable aléatoire *R* qui, à un composant prélevé au hasard dans la production de la machine A, associe la valeur exprimée en ohm de sa résistance, suit une loi normale de paramètres $\mu = 200$ et σ.
On prélève au hasard un composant dans la production.

1. On suppose, dans cette question uniquement, que : $\sigma = 3{,}5$.
Quelle est la probabilité que le composant prélevé soit accepté ? Arrondir à 0,01 près.

2. Avec un meilleur réglage de la machine qui ne modifie pas μ, mais qui agit sur σ, on souhaite pouvoir accepter 95% des composants produits.

a) Quel est la probabilité que : $R \in [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$? Arrondir à 0,01 près.

b) On rappelle qu'un composant est accepté s'il admet une résistance électrique comprise entre 195 et 205 ohms.
Quelle valeur peut-on donner à σ, en réglant la machine, pour que 95% des composants produits soient acceptés ?

Partie B

La machine B fabrique 40% des composants produits par l'entreprise. Le reste est produit par la machine A.
On admet que la machine B produit 8% de composants défectueux et que la machine A produit 5% de composants défectueux.
On prélève au hasard une pièce dans la production.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. ***Pour chaque affirmation, une seule des propositions est exacte. Porter sur la copie, sans justification, le numéro de l'affirmation suivi de la valeur choisie.***
Une bonne réponse rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

Affirmation 1 : Sachant que la pièce prélevée est produite par la machine B, la probabilité qu'elle ne soit pas défectueuse est :

a) 0,368 **b)** 0,92 **c)** 0,08 **d)** 0,032

Affirmation 2 : La probabilité que la pièce prélevée soit produite par la machine A et qu'elle soit défectueuse est :

a) 0,05 **b)** 0,92 **c)** 0,03 **d)** 0,95

Affirmation 3 : La probabilité que la pièce prélevée soit défectueuse est :

a) 0,938 **b)** 0,13 **c)** 0,062 **d)** 0,065

Affirmation 4 : Sachant que la pièce prélevée est défectueuse, la probabilité qu'elle ait été produite par la machine B est à 10^{-4} près :

a) 0,5161 **b)** 0,0320 **c)** 0,0800 **d)** 0,483

Partie C

Dans cette partie, on considère qu'il y a 6% de composants défectueux dans la production globale. L'entreprise vend des boites contenant 150 composants. La production de l'entreprise étant très importante, on peut assimiler la constitution d'une boite à une succession de 150 tirages avec remise.

On note X la variable aléatoire qui à chaque boite associe le nombre de composants défectueux que contient la boite.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Donner ses paramètres.

2. Un client mécontent se présente : il a trouvé 18 composants défectueux dans une boite.
Un commercial de l'entreprise lui répond que moins de 2% des boites commercialisées comportent plus de 15 composants défectueux.

Dans cette question, les résultats seront arrondis 0,001 près.

a) Déterminer la probabilité qu'il y ait exactement 18 composants défectueux dans une boite.

b) Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 16 composants défectueux dans une boite.

c) Le commercial a-t-il raison ?

3. Estimer le nombre moyen de composants défectueux dans une boite.

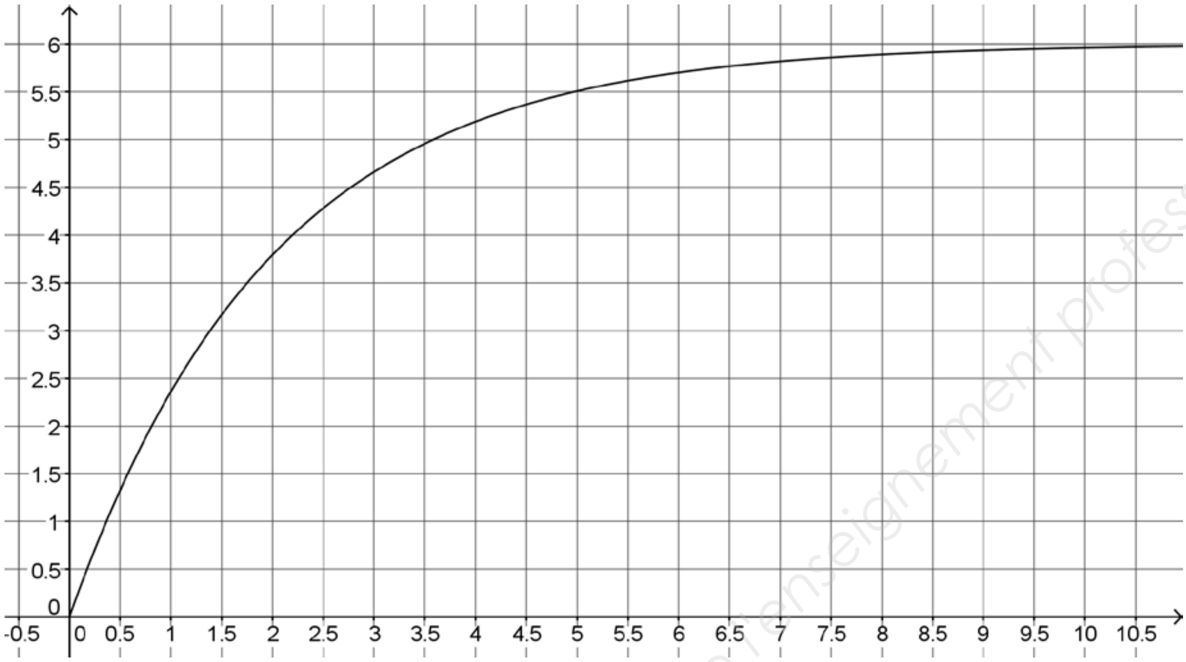
Formules pouvant être utilisées dans l'exercice 1

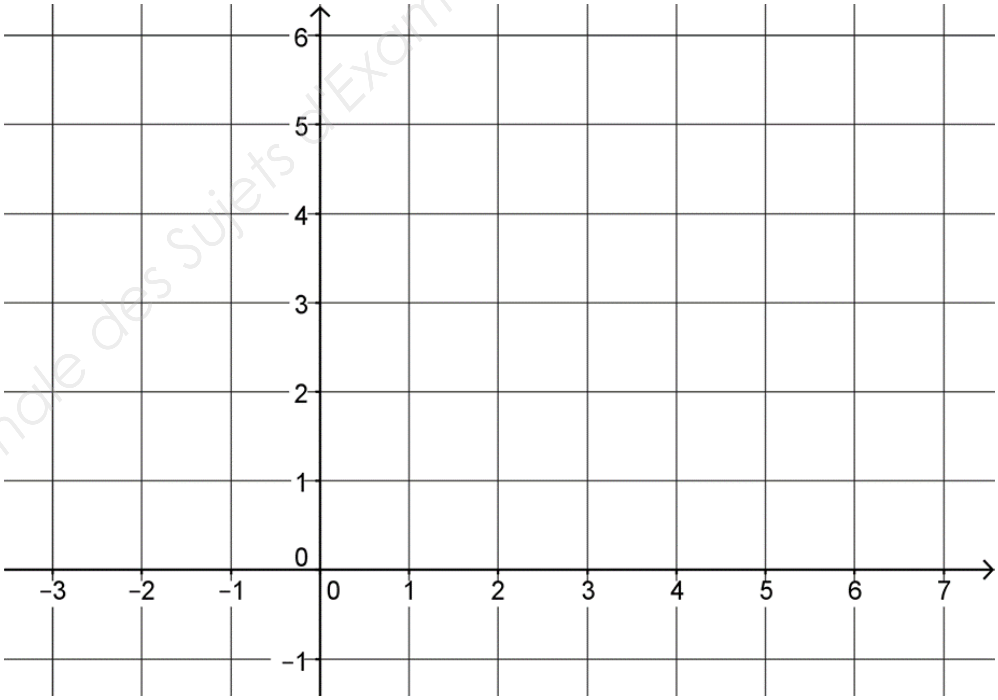
Equation différentielle sans second membre	**Solutions sur R**
$ax' + bx = 0$ avec a constante réelle non nulle et b constante réelle.	$t \mapsto k\,\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$, avec k constante réelle.

Transformation de Laplace	
Fonction	**Transformée de Laplace**
$t \mapsto \mathcal{U}(t)$	$p \mapsto \dfrac{1}{p}$
$t \mapsto \mathcal{U}(t-a)$	$p \mapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-ap}$
$t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\,\mathcal{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \mapsto \dfrac{1}{p+a}$
Propriétés	
Fonction	**Transformée de Laplace**
$t \mapsto f(t)\mathcal{U}(t)$	$p \mapsto F(p)$
$t \mapsto f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$, avec a constante réelle	$p \mapsto F(p)\mathrm{e}^{-ap}$
$t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \mapsto F(p+a)$
$t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t)$	$p \mapsto pF(p) - f(0^{+})$

DOCUMENT REPONSE A RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE 1- Partie A – 5. - Courbe représentative de la fonction *s*





Modèle CMEN-DOC v2 A4 ©NEOPTEC

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Inscription :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

EXERCICE 1- Partie B – 6. - Courbe représentative de la fonction *s*