Brevet de Technicien Supérieur
Groupement D

MATHÉMATIQUES

SESSION 2018

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉS	COEFF
ANALYSES DE BIOLOGIE MÉDICALE	1
BIO ANALYSES ET CONTRÔLES	2
BIOTECHNOLOGIES	1
EUROPLASTICS ET COMPOSITES	2
MÉTIERS DE L'EAU	1,5
QUALITÉS DANS LES INDUSTRIES ALIMENTAIRES ET LES BIO-INDUSTRIES	2

Matériel autorisé :

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6. **La page 6/6 est un formulaire.**

EXERCICE 1 (9 points)

La scanographie est un procédé radiologique, réalisé à l'aide d'un scanner, qui permet de reconstruire informatiquement l'image d'une coupe du corps humain à partir d'une série d'analyses. Elle permet notamment de détecter des tumeurs. Dans cet exercice, on s'intéresse aux scanographies réalisées dans un hôpital.

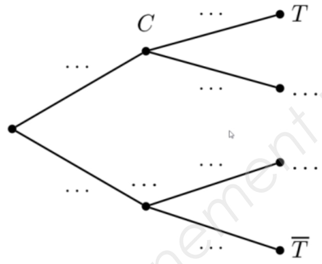
Partie A

Une étude effectuée dans cet hôpital montre que :

- 60 % des scanographies effectuées concernent le cerveau et, parmi celles-ci, 20 % détectent une tumeur ;
- 90 % des autres scanographies effectuées ne détectent pas de tumeur au patient.

Parmi les patients de l'hôpital qui ont besoin d'une scanographie, on en choisit un au hasard. On note C l'événement « le patient fait une scanographie du cerveau » et T l'événement « le patient a une tumeur ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre :



2. Montrer que la probabilité que le patient a une tumeur est égale à 0,16.

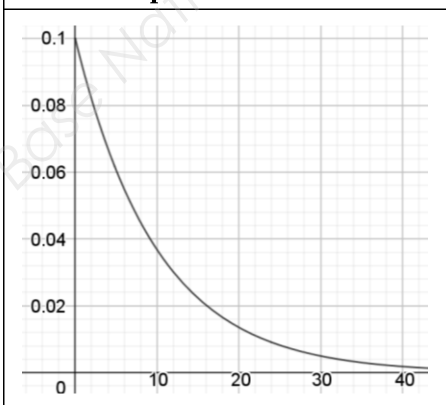
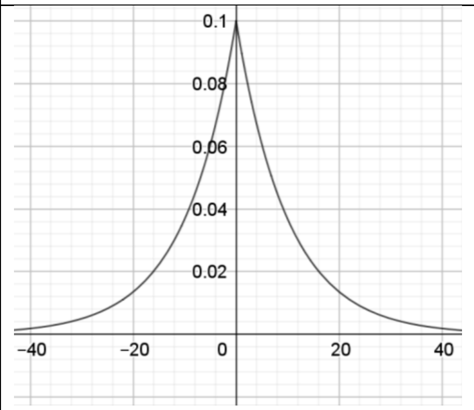
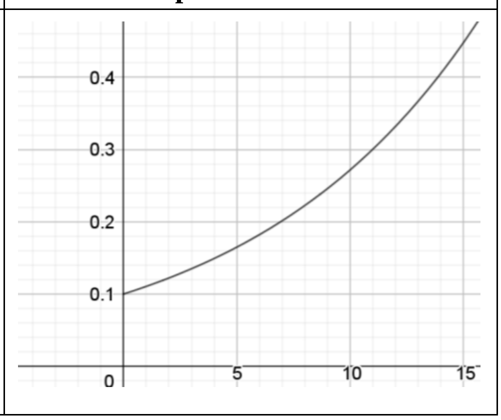
3. La scanographie permet de détecter une tumeur au patient. Quelle est la probabilité que cette tumeur ait été détectée au cerveau ?

4. Sur un échantillon de 40 patients atteints d'une tumeur au cerveau, un médecin constate que 25 patients ont été guéris après un traitement approprié.
   a) Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de patients guéris d'une tumeur au cerveau après un traitement approprié.
   b) Estimer maintenant cette proportion p par un intervalle de confiance au seuil de 95 % (on prendra des valeurs approchées à 10^{-3} près pour les bornes de l'intervalle).

Partie B

On admet que le délai d'attente en jours pour réaliser une scanographie à cet hôpital suit une loi exponentielle de paramètre λ et que le délai d'attente moyen est égal à 10 jours.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une seule représentation correspond à la densité de probabilité de cette loi exponentielle. Sans justifier la réponse, indiquer la représentation correspondante.

Représentation A	**Représentation B**	**Représentation C**
		

3. On rappelle que, si T est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors pour tout réel t de $[0;+\infty[$, on a : $P(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   Déterminer alors la probabilité, arrondie au millième, que le délai d'attente d'un patient pour une scanographie ne dépasse pas 8 jours.

Partie C

Cette partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie. On ne demande pas de justification. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

On admet que la probabilité, arrondie au centième, que le délai d'attente d'un patient pour une scanographie ne dépasse pas 8 jours est égale à 0,55.

On construit aléatoirement un échantillon de 200 patients de l'hôpital, qui se voient prescrire une scanographie. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de ces patients dont le délai d'attente ne dépasse pas 8 jours.

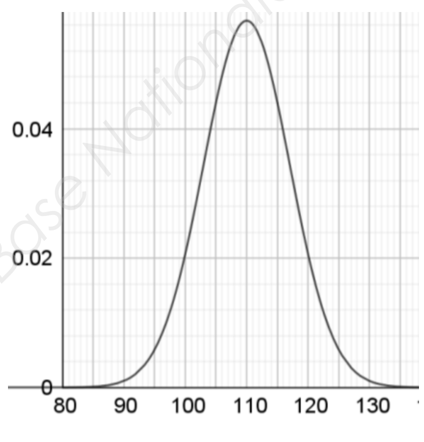
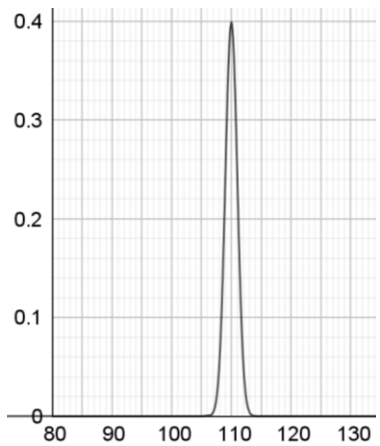
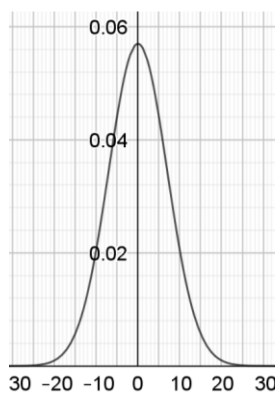
<u>Question 1 :</u>
La variable aléatoire X suit :
A) la loi binomiale de paramètres 200 et 0,55 ;
B) la loi normale de paramètres 200 et 0,55 ;
C) la loi exponentielle de paramètres 200 et 0,55.

<u>Question 2 :</u>
La probabilité que le quart de ces 200 patients ait un délai d'attente qui ne dépasse pas 8 jours est égale à :

A) $P(X \leq 8)$; B) $P\left(X = \frac{1}{4}\right)$; C) $P(X = 50)$.

<u>Question 3 :</u>
La probabilité que moins de la moitié des 200 patients ait un délai d'attente qui ne dépasse pas 8 jours est égale à 10^{-3} près à :
A) 0,021 ; B) 0,068 ; C) 0,932.

<u>Question 4 :</u>
On admet que la loi suivie par la variable aléatoire X peut être approchée par une loi normale. La représentation graphique de cette loi normale est alors :

Réponse (A) :	**Réponse (B) :**	**Réponse (C) :**
		

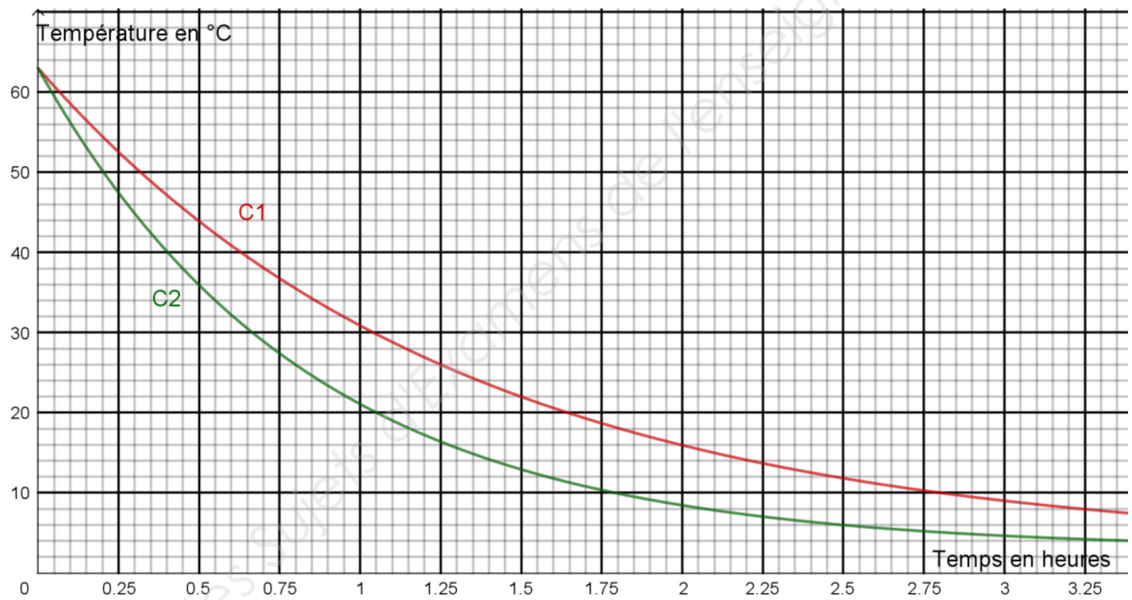
EXERCICE 2 (11 points)

Lors du processus de fabrication de plats cuisinés en restauration collective, le refroidissement est une phase cruciale pour éviter la croissance de germes. La réglementation impose que le refroidissement rapide des barquettes de plats cuisinés soit opéré de telle manière que leur température ne demeure pas à des valeurs comprises entre $+10°C$ et $+63°C$ pendant plus de 2 heures (arrêté du 8 octobre 2013, dispositions particulières applicables aux établissements de restauration collective).

Une entreprise de restauration collective fabrique des barquettes de plats cuisinés, soumises à une attention particulière : lorsqu'elles ont atteint une température de $+63°C$, elles sont placées dans une cellule de refroidissement rapide, et cela afin de respecter la réglementation précédente.

Partie A

On procède à deux réglages différents de la cellule de refroidissement rapide (réglage n° 1 et réglage n° 2). Sur le graphique ci-dessous, sont représentées les courbes C1 et C2, qui correspondent respectivement à la température d'une barquette placée dans la cellule en fonction du temps pour le réglage n° 1 et pour le réglage n° 2.



1. Indiquer la température de la barquette au bout de 90 minutes dans la cellule de refroidissement rapide avec le réglage n° 1.

2. a) Le réglage n° 1 satisfait-il à la réglementation définie ci-dessus ? Justifier.
   b) Le réglage n° 2 satisfait-il à la réglementation définie ci-dessus ? On estimera, avec ce réglage, combien de temps la barquette doit rester dans la cellule de refroidissement rapide pour atteindre une température de $+10°C$.

3. Un employé en charge du réglage de la cellule de refroidissement rapide affirme que la température de la barquette baisse de 5 % toutes les minutes avec le réglage n° 2. Expliquer pourquoi cette affirmation est en contradiction avec la courbe C2.

4. Dans cette question, on admet que la température de la barquette baisse de 2 % toutes les minutes avec un réglage n° 3. Recopier et compléter les lignes 3, 4 et 5 de l'algorithme ci-dessous afin que ce dernier permette de déterminer au bout de combien de temps la température de la barquette sera inférieure à $+10°\text{C}$:

1	N $\leftarrow$ 0
2	T $\leftarrow$ 63
3	Tant que ....
4	Affecter à N la valeur ....
5	Affecter à T la valeur ....
6	Fin Tant que

Partie B

Dans toute cette partie, la température de la cellule de refroidissement rapide est réglée à $+3°\text{C}$ (afin que la température de la barquette ne soit jamais inférieure à $+3°\text{C}$).

Pour le réglage n° 2, la température de la barquette est modélisée par une fonction *f*, qui, à tout temps *t* en heures, associe la température $f(t)$ de la barquette en $°\text{C}$.

1. On admet que la fonction *f* est solution de l'équation différentielle $y' = -1{,}2(y-3)$ sur $[0;+\infty[$.

   a) Démontrer que cette équation différentielle s'écrit encore sous la forme (E) : $y' + 1{,}2y = 3{,}6$.

   b) Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + 1{,}2y = 0$ sur $[0;+\infty[$.

   c) Vérifier que la fonction constante $t \mapsto 3$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

   d) Expliquer pourquoi $f(0) = 63$. Déduire de ce qui précède une expression de $f(t)$ pour tout réel *t* de $[0;+\infty[$.

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel *t* de $[0;+\infty[$, $f(t) = 60\mathrm{e}^{-1{,}2t} + 3$.

2. Donner la valeur arrondie à 10^{-2} de $f(2)$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Déterminer la limite de la fonction *f* en $+\infty$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

4. Avec un logiciel de calcul formel, on obtient : $\dfrac{1}{1{,}5-0}\displaystyle\int_0^{1{,}5} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 30{,}8$ (à 10^{-1} près). Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Pour le réglage n° 1, la température de la barquette est modélisée par une fonction *g*, qui, à tout temps *t* en heures, associe la température $g(t)$ de la barquette en $°\text{C}$. On admet que la courbe C1 est la représentation graphique de cette fonction *g*.

   En s'inspirant de la forme de l'expression de la fonction *f*, proposer une expression de $g(t)$ pour tout réel *t* de $[0;+\infty[$. Expliquer la démarche.

Formulaire

Intervalle de confiance d'une proportion

On mesure une fréquence f d'un caractère dans un échantillon de taille n et on souhaite estimer la proportion p inconnue dans la population toute entière. L'intervalle de confiance à 95 % de la proportion p inconnue est l'intervalle centré sur f :

$$\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\,;\, f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right].$$

Lois de probabilités suivies par une variable aléatoire ***X***			
Nom de la loi	*Paramètre(s)*	*Espérance E(X)*	*Écart type σ (X)*
Binomiale	n et p	np	$\sqrt{np(1-p)}$
Normale	μ et σ	μ	σ
Poisson	λ	λ	$\sqrt{\lambda}$
Exponentielle	λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$

Équation différentielle : $ay' + by = 0$

Les solutions sont les fonctions de la forme $f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$ où k est une constante réelle.