BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2018

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B ***CODE : MATGRB2***

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉ	COEFFICIENT
Conception et industrialisation en microtechniques	**1,5**

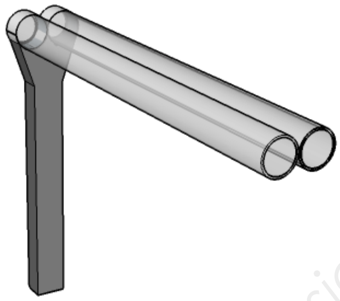
L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

<u>Tout autre matériel est interdit.</u>

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

EXERCICE 1 (10 points)

Plusieurs projets de train à très haute vitesse et à propulsion électromagnétique sont en préparation, à l'image de l'Hyperloop.
Les wagons ont une forme cylindrique et sont propulsés dans un tube à basse pression afin de réduire les frottements.
Les ingénieurs ont fixé comme objectif impératif pour le départ de chaque wagon d'atteindre en moins de 2 minutes une vitesse instantanée de 400 km.h^{-1}.



On note $f(t)$ la distance parcourue par le wagon, en km, à l'instant t, en minute. On suppose que f est une fonction de la variable t définie et dérivable sur l'intervalle [0, 3].

L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f afin de vérifier les caractéristiques du départ.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

En appliquant les contraintes physiques et technologiques du projet, de premiers résultats conduisent à l'équation différentielle (E) :

$$y' - 0{,}2\,y = 3\,t \;,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et y' la fonction dérivée de y.

1° Résoudre sur $[0, +\infty[$ l'équation différentielle (E_0) :

$$y' - 0{,}2\,y = 0 \;.$$

On fournit les formules suivantes :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + a\,y = 0$	$y(t) = k\,\mathrm{e}^{-a t}$

2° Vérifier que la fonction g, définie sur [0, 3] par $g(t) = -15\,t - 75$, est une solution de l'équation différentielle (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Au temps $t = 0$, le wagon est au point de départ. Déterminer la fonction f solution de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

B. Étude de fonction et application

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0, 3] par $f(t) = 75(e^{0,2\,t} - 1) - 15\,t$.
On désigne par C la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.

1° Un logiciel de calcul formel fournit ci-dessous des expressions de $f(t)$ et de $f\,'(t)$. Ces résultats sont admis et peuvent être exploités dans les questions suivantes.

▸ Calcul formel	
1	f(t):=75(exp(0.2*t)-1)-15*t → $\mathbf{f(t) := 75\,e^{\frac{1}{5}t} - 15\,t - 75}$
2	f'(t) → $\mathbf{15\,e^{\frac{1}{5}t} - 15}$

a) Résoudre sur l'intervalle [0, 3] l'inéquation $f\,'(t) \geq 0$.

b) En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle [0, 3].

2° On rappelle que $f(t)$ correspond à la distance parcourue par le wagon, en km, à l'instant t, en minute. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus au bout d'une minute. Arrondir le résultat au dixième.

3° a) La vitesse du wagon, en kilomètre par minute, à l'instant t, correspond à $f\,'(t)$.
En déduire la vitesse, en kilomètre par minute, du wagon à t = 2 minutes. Arrondir le résultat au dixième.

b) L'objectif des ingénieurs est-il atteint ? Justifier la réponse.

4° *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 2 est :

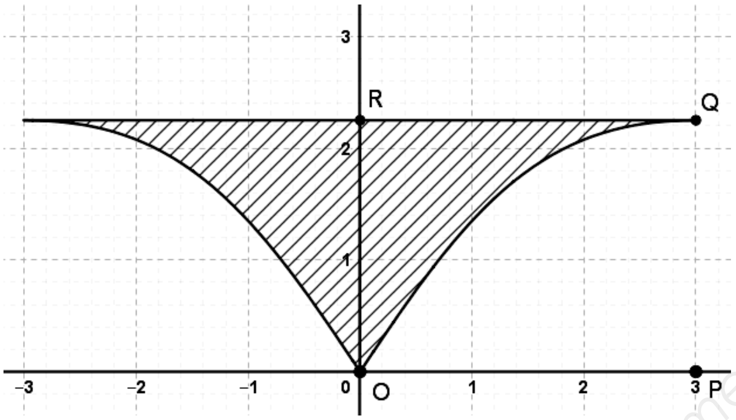
$y = 15\,(e^{0,4} - 1)\,t$	$y = 15\,(e^{0,4} - 1)\,t + 45\,e^{0,4}$	$y = 15\,(e^{0,4} - 1)\,t + 45\,e^{0,4} - 75$

On fournit la formule suivante :

Une équation de la tangente au point d'abscisse a de la courbe représentative de f est : $y = f\,'(a)\,(t - a) + f(a)$.

C. Calcul intégral

Afin d'aménager les futures gares dédiées à ce train à très haute vitesse, les architectes ont dessiné la pièce suivante, représentée dans un repère orthonormé avec pour unité graphique 1 mètre sur les deux axes.



On désire calculer de façon précise l'aire A hachurée sur le dessin. Pour cela on dispose des données suivantes :

- la pièce est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- le bord supérieur correspond à la droite d'équation $y = 2{,}25$;
- le bord inférieur droit correspond à la fonction g définie sur l'intervalle [0, 3] par :

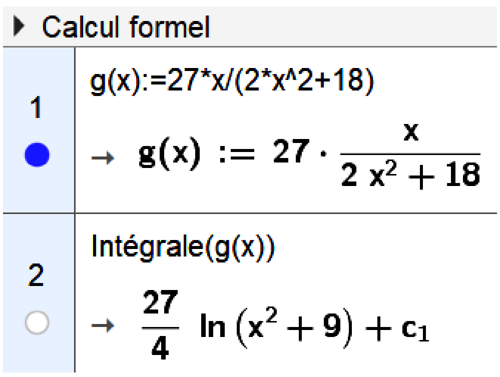
$$g(x) = \frac{27x}{2x^2 + 18}.$$

1° *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

L'aire A_1 du rectangle OPQR, en unité d'aire (u. a.), est égale à :

3 u. a.	5,25 u. a.	6,75 u. a.

2° Un logiciel de calcul formel donne ci-dessous une primitive de la fonction g sur l'intervalle [0, 3], où c_1 est une constante. Ce résultat est admis et pourra être exploité dans les questions suivantes.


Calcul formel

1 g(x):=27*x/(2*x^2+18)

$\rightarrow\ g(x) := 27 \cdot \frac{x}{2x^2 + 18}$

2 Intégrale(g(x))

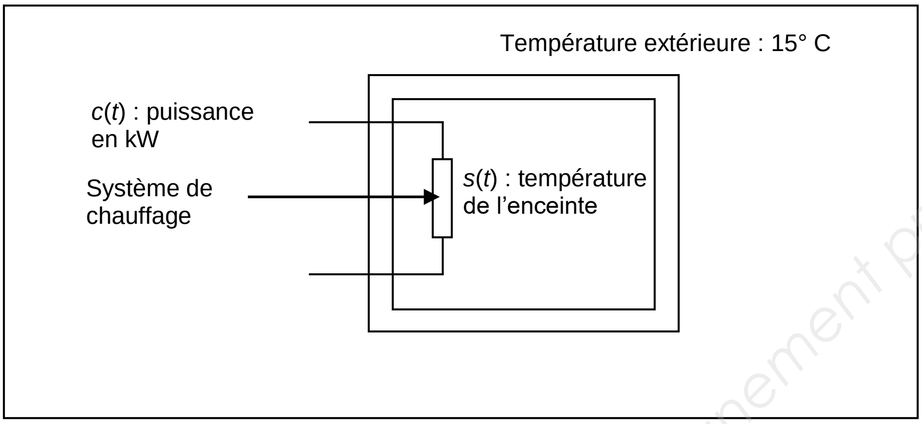
$\rightarrow\ \frac{27}{4} \ln\left(x^2 + 9\right) + c_1$

Calculer l'aire A_2, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe représentative de la fonction g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

3° Déduire des questions précédentes l'aire A en unité d'aire. Arrondir au millième.

EXERCICE 2 (10 points)

On considère une enceinte fermée et isolée. La température à l'extérieur est supposée constante et égale à 15° C. À l'instant initial, la température à l'intérieur de l'enceinte est la même qu'à l'extérieur. On chauffe l'enceinte durant 20 secondes à une puissance constante de 1 300 kW, puis on arrête le chauffage. On souhaite connaître la température de l'enceinte en fonction du temps t exprimé en seconde.



On note $c(t)$ la puissance de chauffe en kW à l'instant t et $s(t)$ la température à l'intérieur de l'enceinte à l'instant t.
On désigne par $\mathcal{U}$ la fonction échelon unité définie par $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geq 0$.

Dans le système étudié, la fonction s est solution de l'équation différentielle (E) :

$$s'(t) + 0{,}2\, s(t) = e(t) ,$$

où $e(t) = 3\,\mathcal{U}(t) + \dfrac{1}{130}\, c(t)$ et $s(0^+) = 0$.

On se propose de déterminer $s(t)$ en utilisant la transformation de Laplace. On suppose que s, s' et e admettent des transformées de Laplace.
On note $E(p) = \mathcal{L}(e(t))$ et $S(p) = \mathcal{L}(s(t))$, où $\mathcal{L}$ est la transformée de Laplace.

Un formulaire concernant la transformation de Laplace est fourni page 7/7.

A. Étude du second membre de l'équation différentielle

1° *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

On a $c(t) = 1\,300\,(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 20))$. Indiquer la figure représentant la courbe de la fonction c.

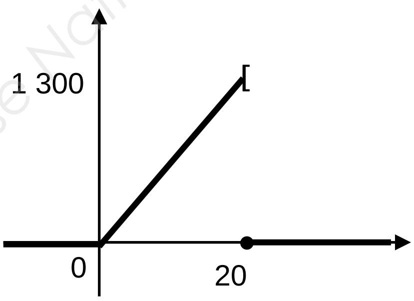


Figure 1

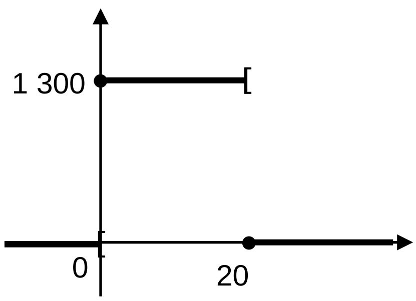


Figure 2

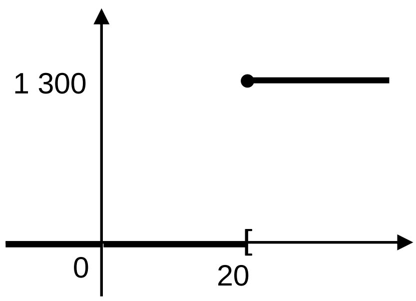


Figure 3

2° Montrer que $e(t) = 13\,\mathcal{U}(t) - 10\,\mathcal{U}(t-20)$.

3° Déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t))$ et $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t-20))$.

4° En déduire $E(p)$.

B. Transformée de Laplace S du signal de sortie

1° Déterminer $\mathcal{L}(s'(t))$ en fonction de $S(p)$.

2° a) Vérifier que $\mathcal{L}(s'(t) + 0{,}2\,s(t)) = (p + 0{,}2)\,S(p)$.

b) En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle, montrer que $S(p) = \dfrac{13 - 10\,\mathrm{e}^{-20p}}{p(p+0{,}2)}$.

3° Un logiciel de calcul formel fournit le résultat suivant. Ce résultat est admis et pourra être exploité dans cette question.

▸ Calcul formel	
1	ElémentsSimples(1/(p*(p+0.2)),p) $\rightarrow \dfrac{5}{p} - \dfrac{25}{5\,p+1}$

En déduire que $S(p)$ peut s'écrire :

$$S(p) = \frac{65}{p} - \frac{325}{5p+1} - \frac{50}{p}\,\mathrm{e}^{-20p} + \frac{250}{5p+1}\,\mathrm{e}^{-20p}.$$

C. Expression du signal de sortie

1° Un logiciel de calcul formel fournit le résultat suivant. Ce résultat est admis et pourra être exploité dans les questions suivantes.

```
>>> inverse_laplace_transform(65/p-325/(5p+1)-50/p*exp(-20p)+250/(5p+1)*exp(-20p),p,t)
```

$$65\,\mathcal{U}(t) - 65\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t}\,\mathcal{U}(t) - 50\,\mathcal{U}(t-20) + 50\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}(t-20)}\,\mathcal{U}(t-20)$$

a) Préciser $s(t)$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

b) Soit t un nombre réel dans l'intervalle [0, 20[.

Montrer que $s(t) = 65\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t}\right)$.

c) Soit t un nombre réel dans l'intervalle [20, + ∞[.

Montrer que $s(t) = 15 - 65\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t} + 50\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}(t-20)}$.

2° Déterminer la température de l'enceinte pour t = 60 secondes. Arrondir à 10^{-2}.

Formulaire

$$\begin{tikzcd} f(t)\,\mathscr{U}(t) \arrow[r, bend left, "\mathscr{L}"] & F(p) \arrow[l, bend left, "\mathscr{L}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

On rappelle les formules suivantes sur la transformation de Laplace.

$$\mathscr{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathscr{L}[f] + \mu \mathscr{L}[g] .$$

$$\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)] = \frac{1}{p} .$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-at}\,\mathscr{U}(t)] = \frac{1}{p+a} .$$

Plus généralement, si on note $\mathscr{L}[f(t)\,\mathscr{U}(t)] = F(p)$ alors,

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)\,\mathscr{U}(t-\tau)] = F(p)\,\mathrm{e}^{-\tau p} ;$$

$$\mathscr{L}[f(t)\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathscr{U}(t)] = F(p+a) ;$$

$$\mathscr{L}[f'(t)\,\mathscr{U}(t)] = p\,F(p) - f(0^+) ;$$

$$\mathscr{L}[f''(t)\,\mathscr{U}(t)] = p^2 F(p) - p\,f(0^+) - f'(0^+) .$$