BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SYSTÈMES NUMÉRIQUES

MATHÉMATIQUES

Session 2018

Durée : 3 heures

Coefficient : 3

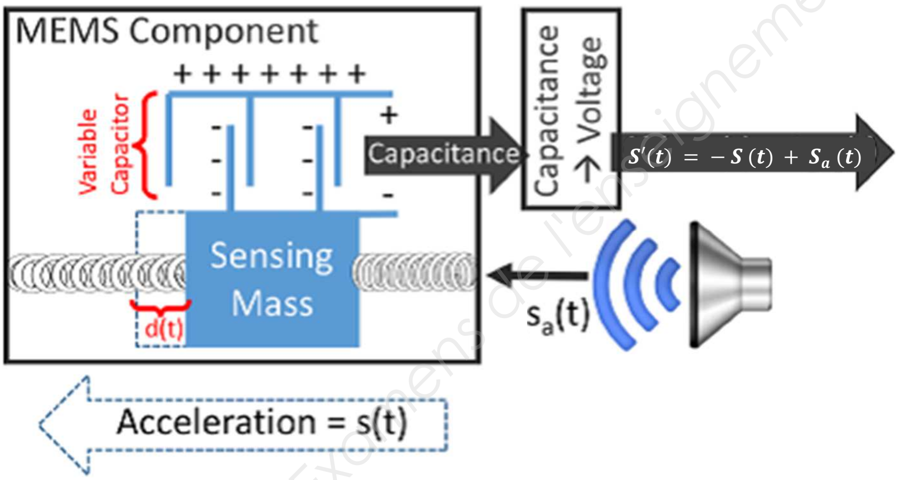
L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet se compose de 10 pages, numérotées de 1/10 à 10/10.

EXERCICE 1 (6 points)

D'après une étude présentée en avril 2017 à l'IEEE *European Symposium on Security & Privacy*, des ondes sonores pourraient être exploitées pour pirater les capteurs qui équipent nos smartphones, nos bracelets d'activité, certains équipements médicaux, des objets connectés et même des voitures autonomes.

Les accéléromètres MEMS utilisés dans les appareils électroniques fonctionnent avec un système de masse monté sur ressort qui permet de mesurer l'accélération linéaire de l'objet. En général, les appareils mobiles sont équipés d'accéléromètres à trois axes afin d'obtenir des relevés en trois dimensions. Ces informations sont numérisées puis transmises au système d'exploitation et aux logiciels qui en ont besoin. Le schéma ci-dessous montre comment une onde sonore peut perturber un appareil électronique.



Partie A

Dans cette partie l'accélération est modélisée par la fonction S.

On admet que S vérifie la relation $S'(t) = -S(t) + S_a(t)$, où t est le temps exprimé en ms et S_a l'effet de l'onde sonore envoyée pour perturber l'appareil électronique.

Dans cette expérience, la perturbation S_a vérifie $S_a(t) = U_0 \cos(\omega t)$ avec $U_0 = 5$ et $\omega = 500 \text{ rad} \cdot s^{-1}$.

1) Montrer que la fonction S est solution de l'équation différentielle

(E) : $y'(t) + y(t) = 5\cos(500\,t)$.

2) Résoudre l'équation sans second membre : $y'(t) + y(t) = 0$.

3) On admet qu'une solution particulière de (E) est donnée par la fonction h définie par : $h(t) = \frac{2500}{250001}\sin(500t) + \frac{5}{250001}\cos(500t)$.

En déduire l'ensemble des solutions de (E).

4) Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $S(0) = 0$.

Partie B

On rappelle que, si la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors pour tout réel $t > 0$, exprimé en ms : $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda u}\, \mathrm{d}u$.

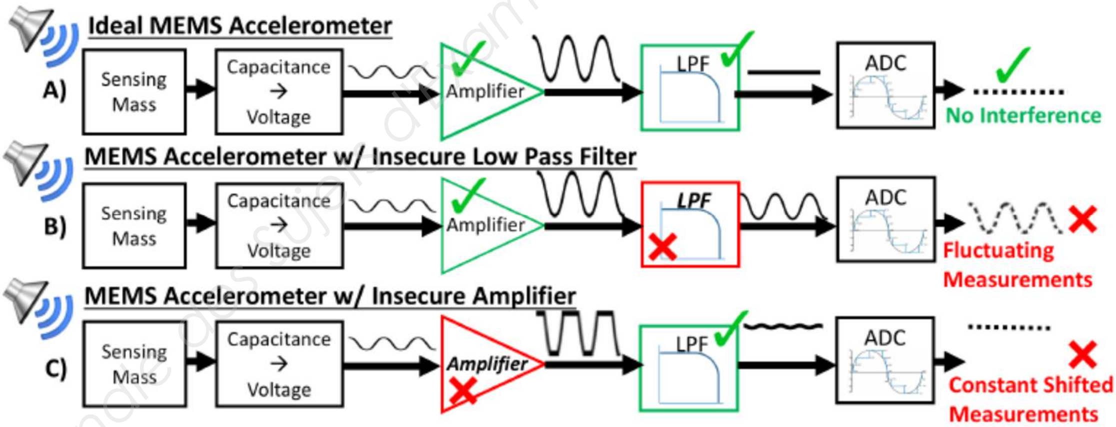
Les accéléromètres MEMS utilisés dans les appareils électroniques ont des temps de réponse en millisecondes pouvant être modélisés par une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ .

1) Montrer que $P(X \leq 1) = 1 - e^{-\lambda}$.
2) Une étude menée sur un grand nombre d'accéléromètres a montré que la moitié d'entre eux ont un temps de réponse inférieur à une milliseconde.
   En déduire la valeur exacte de λ.
3) On suppose maintenant que $\lambda \approx 0{,}69$. Déterminer, à 10^{-2} près, le temps moyen de réponse de ces accéléromètres en ms.

Partie C

Les accéléromètres MEMS disposent dans leurs composants d'un amplificateur et d'un filtre passe bas.

Lors d'une utilisation idéale, une onde sonore ne crée pas d'interférence. Cependant ces composants ont leurs limites et on peut alors observer des modifications comme le montre la figure ci-dessous.



Lors de ces expériences on a relevé les données suivantes :

- 85 % des amplificateurs ont été modifiés par l'onde sonore et parmi ceux-là 70 % ont eu leur filtre perturbé.
- Sur les amplificateurs non modifiés, 90 % ont eu leur filtre perturbé par l'onde sonore.

On notera A l'événement : « l'amplificateur est modifié » et F l'événement : « le filtre est perturbé ».

On choisit au hasard un accéléromètre MEMS ayant subi une onde sonore.

1) Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
2) Calculer la probabilité que l'accéléromètre MEMS ne subisse aucun changement, c'est-à-dire que son amplificateur ne soit pas modifié et son filtre ne soit pas perturbé.
3) Montrer que la probabilité que le filtre ne soit pas perturbé est de 0,27.
4) Le filtre de l'accéléromètre MEMS n'ayant pas été perturbé, quelle est la probabilité, à 10^{-2} près, que son amplificateur soit modifié ?

EXERCICE 2 (6 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère un filtre numérique régi par l'équation récurrente suivante :

$$s(n) - 3s(n-1) = e(n) \qquad \text{(E)}$$

avec e le signal d'entrée échelon unité discret, et s le signal de sortie causal discret.

On rappelle que $e(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$.

On se propose dans cet exercice de déterminer l'expression du signal s en fonction de n de deux manières différentes.

Partie A

1) a) Justifier que $s(0) = 1$.
   b) Calculer $s(1)$ et $s(2)$.

2) Pour tout entier naturel n, l'équation (E) s'écrit : $s(n) = 1 + 3\,s(n-1)$.
   On considère la suite $(x(n))$ définie pour tout entier naturel n par :

$$x(n) = s(n) + 0{,}5\ .$$

   a) Soit n un entier naturel non nul fixé. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous au niveau des pointillés pour qu'il affiche en sortie la valeur de $x(n)$.

Variables	s et x sont des nombres réels
Initialisation	s prend la valeur 1 x prend la valeur 1,5

Traitement	Pour i allant de *1* à n
	    s prend la valeur ...
	    x prend la valeur ...
	Fin pour

Sortie	Afficher x

b) À l'aide de cet algorithme complété, on parvient à établir le tableau de valeurs ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6
$x(n)$	1,5	4,5	13,5	40,5	121,5	364,5	1093,5

La suite $(x(n))$ semble-t-elle arithmétique, géométrique, ou ni l'une ni l'autre? Justifier brièvement cette conjecture à partir des valeurs du tableau.

c) Démontrer la conjecture faite à la question b).

d) En déduire que $x(n) = 1{,}5 \times 3^n$, puis donner l'expression de $s(n)$ en fonction de n.

e) Retrouver alors les valeurs de $s(0)$, $s(1)$ et $s(2)$, déterminées en question 1.

Partie B

On se place dans le cas où $n \geq 1$.

On rappelle que (E) : $s(n) - 3s(n-1) = e(n)$ et que $s(0) = 1$.

On admet que le signal s, solution de l'équation récurrente (E), admet une transformée en Z notée $S(z)$.

1) Démontrer, en s'aidant éventuellement du formulaire ci-après, que pour tout z différent de 0, 1 et 3, on a : $S(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-3)}$.

2) On remarque que : $\frac{S(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$.

Un logiciel de calcul formel donne la décomposition en éléments simples suivante :

partfrac (z/((z − 1) ∗ (z − 3))
$\frac{3}{2*(z-3)} - \frac{1}{2*(z-1)}$

En déduire l'expression de $s(n)$ en fonction de n.

Vérifier la cohérence du résultat obtenu avec l'expression déterminée en Partie A, question 2d.

Transformation en Z	
Signal causal	**Transformée en Z**
$n \mapsto 1$	$z \mapsto \dfrac{z}{z-1}$
$n \mapsto d(n)$ avec $\begin{cases} d(0) = 1 \\ d(n) = 0 \quad \text{si } n \neq 0 \end{cases}$	$z \mapsto 1$
$n \mapsto r(n) = n$	$z \mapsto \dfrac{z}{(z-1)^2}$
$n \mapsto n^2$	$z \mapsto \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$n \mapsto a^n$ avec a réel non nul	$z \mapsto \dfrac{z}{z-a}$
Propriétés	
$n \mapsto x(n)$	$z \mapsto X(z)$
$y : n \mapsto a^n x(n)$, avec a réel non nul	$Y(z) = X\left(\dfrac{z}{a}\right)$
$y : n \mapsto x(n-n_0)$, pour $n \geq n_0$	$Y(z) = z^{-n_0} X(z)$
$y : n \mapsto x(n+1)$	$Y(z) = z\left[X(z) - x(0)\right]$
$y : n \mapsto x(n+2)$	$Y(z) = z^2\left[X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}\right]$
$y : n \mapsto x(n+n_0)$, avec $n_0 \geq 1$	$Y(z) = z^{n_0}\left[X(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2} - ..... - x(n_0-1)z^{-(n_0-1)}\right]$

EXERCICE 3 (4 points)

QCM : Recopier sur la copie la lettre correspondant à <u>la bonne réponse</u> pour chacune des questions suivantes. Une bonne réponse rapporte 0,5 points tandis qu'une mauvaise réponse ou l'absence de réponse rapporte 0 point. Aucune justification n'est attendue.

Toutes les questions sont indépendantes.

Partie A

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On désigne par ω un nombre réel. On considère alors la fonction de transfert H d'un circuit, définie par :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}\ .$$

1) Le module de $H(j\omega)$ vaut :

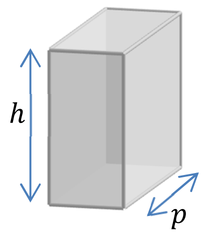
a) $\frac{1}{1+\omega^2}$ b) $\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$ c) $\frac{1}{1+\omega}$ d) $\sqrt{1+\omega}$

2) Un argument de $H(j\omega)$ vaut :

a) $\arctan\frac{1}{\omega}$ b) $\arctan\frac{1}{1+\omega}$ c) $-\arctan\frac{1}{1+\omega}$ d) $-\arctan\omega$

Partie B

Une entreprise fabrique des boîtiers pour ordinateur de bureau.



Pour être conforme, la hauteur doit être comprise entre 43,4 cm et 43,6 cm et la profondeur doit être comprise entre 37,9 cm et 38,1 cm.

On suppose que la hauteur, en cm, peut être modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 43{,}5$ et $\sigma = 0{,}04$.

On modélise la profondeur, exprimée en cm, par une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètre $\mu' = 38$ et d'écart-type inconnu σ'.

1) La probabilité que la hauteur du boîtier ne soit pas conforme est d'environ :

a) 0,01 b) 0,99 c) 0,95 d) 0,5

2) Soit h un réel positif. On veut que la probabilité que la hauteur du boîtier soit inférieure à h soit égale à 0,9. Il faut alors que la hauteur h en cm soit d'environ :

a) 43,35 b) 43,45 c) 43,55 d) 43,65

3) On veut que la probabilité que le boîtier soit conforme pour la profondeur soit de 0,95. Il faut alors que la valeur de σ' soit d'environ :

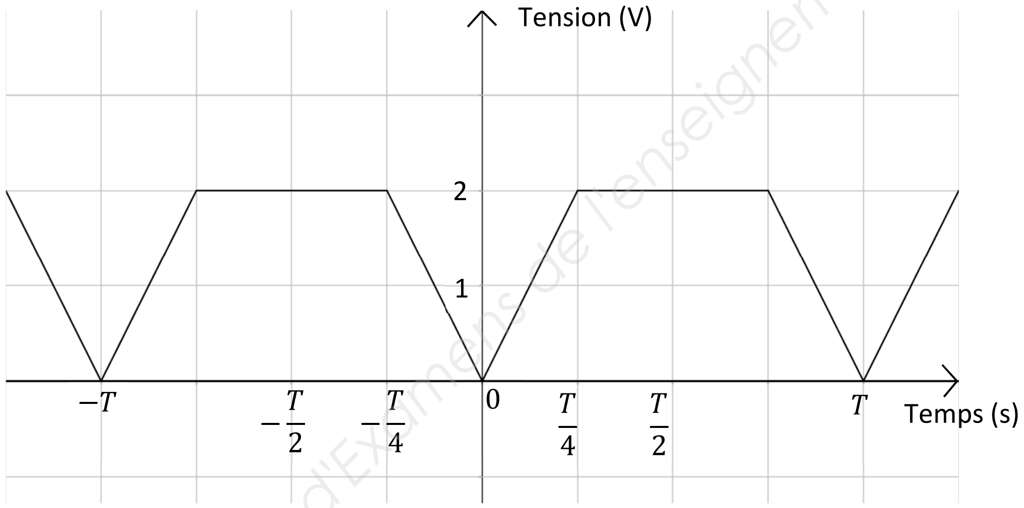
a) 0,95 b) 0,05 c) 0,03 d) 0,9

4) On suppose dans cette question que $\sigma' = 0{,}04$ et que les variables aléatoires qui modélisent la hauteur et la profondeur sont indépendantes. La probabilité que le boîtier soit conforme pour la hauteur et la profondeur est d'environ :

a) 0,95 b) 1,98 c) 0,98 d) 0,99

Partie C

On considère un signal pair et périodique de période T dont voici une représentation :



1) L'expression de ce signal est :

a) $\begin{cases} \frac{8}{T}t \text{ pour } t \in \left[0;\frac{T}{4}\right] \\ 2 \quad \text{pour } t \in \left]\frac{T}{4};\frac{T}{2}\right] \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{4}{T}t \text{ pour } t \in \left[0;\frac{T}{4}\right] \\ 2 \text{ pour } t \in \left]\frac{T}{4};\frac{T}{2}\right] \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2t \text{ pour } t \in \left[0;\frac{T}{4}\right] \\ 2 \quad \text{pour } t \in \left]\frac{T}{4};\frac{T}{2}\right] \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{8}{T}t \text{ pour } t \in \left[0;\frac{T}{4}\right] \\ 1 \text{ pour } t \in \left]\frac{T}{4};\frac{T}{2}\right] \end{cases}$

2) La valeur moyenne (en Volts) de ce signal sur une période est :

a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) 6

EXERCICE 4 (4 points)

L'analyse spectrale du son d'un instrument de musique permet d'identifier les notes et harmoniques jouées. Pour cela, on échantillonne le signal sonore enregistré.

On obtient le spectre de ce signal grâce à la Transformée de Fourier Discrète (TFD), appliquée sur un extrait de taille n du signal discrétisé.

On traitera dans cet exercice le cas $n = 3$, sauf pour la dernière question.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}\,; \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On pose $\omega = \mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{3}}$.

1) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes ω, ω^2 et ω^3.

2) Sur la copie, placer les points d'affixes 1, ω et ω^2 dans le repère $(O; \vec{u}\,; \vec{v})$.

3) On considère la matrice de TFD d'ordre 3 suivante :

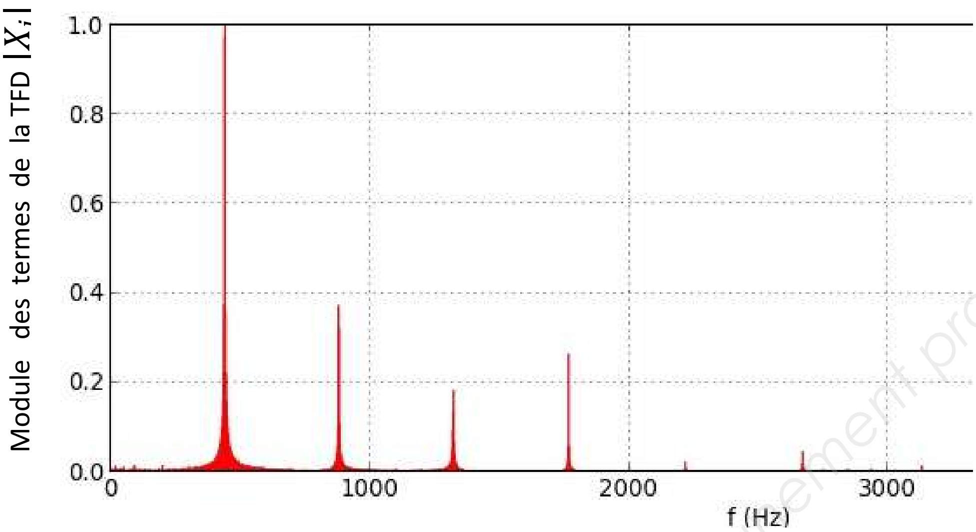
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \end{pmatrix}$$

On rappelle que cette matrice permet de calculer la TFD (X_0, X_1, X_2) du signal discret (x_0, x_1, x_2) en effectuant le produit matriciel $M \times \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

a) On donne $(x_0, x_1, x_2) = (0, 1, 3)$. Calculer (X_0, X_1, X_2).

b) Si le signal obtenu en sortie est : $(Y_0, Y_1, Y_2) = \left(-8,\ 4 - 2\sqrt{3}\,j,\ 4 + 2\sqrt{3}\,j\right)$, quel était le signal d'entrée (y_0, y_1, y_2) ?

4) On utilise désormais un échantillon de taille $n = 44\,100$, et on obtient alors le spectre suivant :



À l'aide du tableau des fréquences des notes ci-dessous, retrouver la note de musique et l'octave joués, repérés par l'amplitude la plus grande. Justifier la réponse.

Octave / Note	0	1	2	3	4	5
Do	32,70	65,41	130,80	261,63	523,25	1046,50
Ré	36,71	73,42	146,83	293,66	587,33	1174,66
Mi	41,20	82,41	164,81	329,63	659,26	1318,51
Fa	43,65	87,31	174,61	349,23	698,46	1396,91
Sol	49,00	98,00	196,00	392,00	783,99	1567,98
La	55,00	110,00	220,00	440,00	881,00	1760,00
Si	61,74	123,47	246,94	493,88	987,77	1975,53