BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Session 2019

Durée : 2 heures

Coefficient : 2

Matériel et documents autorisés

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode d'examen, est autorisé.

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comporte 5 pages, numérotées de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 1 (10 points)

Un formulaire est fourni en fin d'exercice.

Un bloc autonome d'éclairage et de sécurité (BAES) doit signaler les issues de secours dans un bâtiment accueillant du public. Il doit être visible de nuit comme de jour même dans le cas d'une coupure de courant.
Un fabriquant de BAES décide d'utiliser un supercondensateur pour alimenter l'éclairage.

On note t la durée d'éclairage en seconde après une coupure de courant.
On note $f(t)$ la différence de potentiel (ddp) aux bornes du supercondensateur définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Le principe de fonctionnement est le suivant :

- le BAES est alimenté par l'alimentation électrique du bâtiment, le supercondensateur est chargé à 6 volts donc $f(0) = 6$;
- une panne électrique survient, le BAES est alimenté électriquement par le supercondensateur et la ddp à ses bornes diminue ;
- lorsque la ddp aux bornes du supercondensateur atteint 3 volts, l'éclairage de secours s'éteint ;
- enfin le supercondensateur continue de se décharger très lentement jusqu'à une valeur limite.

L'objectif de cet exercice est de s'assurer que le supercondensateur a une capacité suffisante pour maintenir l'éclairage de secours durant 1 heure au moins comme l'impose la législation.

On décide de modéliser la ddp aux bornes du supercondensateur par la fonction f définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$, solution de l'équation différentielle d'inconnue y :

$$\begin{cases} (\mathrm{E}) : y'(t) + 5 \times 10^{-4} y(t) = 14{,}5 \times 10^{-4} \\ f(0) = 6 \end{cases}$$

Partie A – Résolution d'une équation différentielle

1. Résoudre l'équation différentielle :
$$(\mathrm{E_0}) : y'(t) + 5 \times 10^{-4} y(t) = 0\,.$$

2. Déterminer une fonction constante solution de l'équation différentielle :
$$(\mathrm{E}) : y'(t) + 5 \times 10^{-4} y(t) = 14{,}5 \times 10^{-4}\,.$$

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. On rappelle que $f(0) = 6$. En déduire l'expression de $f(t)$ pour $t \in [0\,;+\infty[$.

Partie B – Étude d'une fonction

Dans cette partie, on admet que $f(t) = 3{,}1e^{-5\times10^{-4}t} + 2{,}9$ pour $t \in [0\,;+\infty[$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. a) Déterminer l'expression de $f'(\mathrm{t})$ où f' est la dérivée de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

   b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$ en indiquant les limites de f aux bornes de l'intervalle sur $[0\,;+\infty[$.

3. On cherche à estimer la durée d'éclairage après coupure de courant dans le bâtiment.

   a) Déterminer la valeur t_1 mesurée en seconde correspondant à la durée d'éclairage. Arrondir à la seconde.

   b) Ce dispositif est-il conforme à la législation ?

FORMULAIRE

Équation différentielle d'ordre 1

Les solutions de l'équation différentielle homogène (E_0) : $ay'(t) + by(t) = 0$ sont les fonctions y définies sur un intervalle I par :

$$y(t) = ke^{-\frac{b}{a}t} \text{, avec } k \text{ constante réelle.}$$

Formule de dérivation

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et on a :

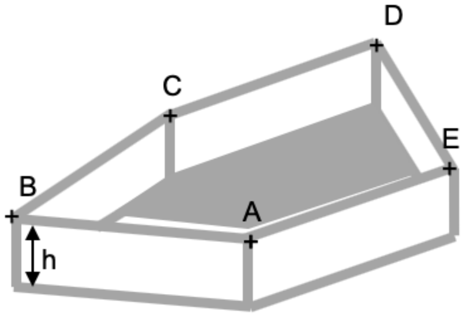
$$(e^u)' = u'e^u$$

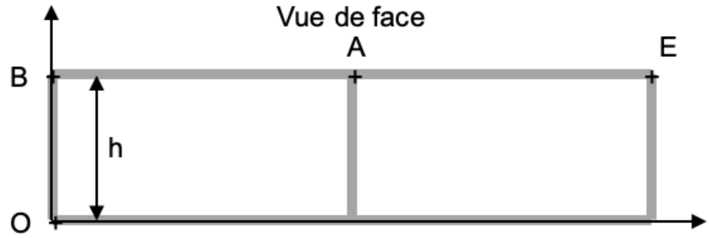
EXERCICE 2 (10 points)

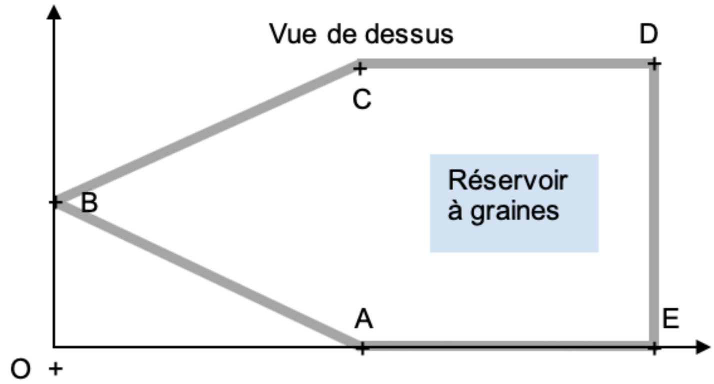
Un formulaire est fourni en fin d'exercice.

Une entreprise construit des bateaux d'amorçage. Ces bateaux destinés à la pêche, sont des maquettes radio commandées.

On représente un de ces bateaux par une vue de face et une vue de dessus.
Les figures ne sont pas à l'échelle.







L'espace est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On définit les points A, B, C, D et E par leurs coordonnées en centimètre :
$A(50\,;0\,;\,h)$, $B(0\,;20\,;h)$, $C(50\,;40\,;h)$, $D(80\,;40\,;h)$ et $E(80\,;0\,;h)$
h étant la hauteur de la coque d'un de ces bateaux.

Partie A – Angle et produit scalaire

Dans cette partie on cherche à calculer l'angle à l'avant du bateau.

Lors de la conception d'un de ces bateaux, l'entreprise est amenée à déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
Cet angle doit être compris entre 30° et 60°.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.
3. Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
4. a) Calculer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie à 1 degré près.
   b) La contrainte imposée par l'entreprise est-elle respectée ?

Partie B – Calcul d'aire et flottaison

Le poids total du bateau peut atteindre 7 kg. Afin de s'assurer de sa capacité à flotter, il faut calculer l'aire de la base de la coque.

1. Calculer l'aire de l'avant du bateau, assimilable au triangle ABC.

2. Calculer l'aire du rectangle $ACDE$.

3. On suppose que la hauteur h de la coque du bateau est 3cm. En déduire son volume.

4. On cherche à savoir si le bateau est en mesure de flotter. La poussée d'Archimède est une force exercée vers le haut dont la norme en Newton (N), est dans notre cas, approximativement $\|\vec{F}\| = 10 \times$ (volume d'eau déplacée en dm^3). Calculer la norme de la force de la poussée d'Archimède subie par le bateau.

5. Sachant qu'au maximum le poids du bateau exerce une force vers le bas de 70 N, le bateau sera-t-il en mesure de flotter ? Si ce n'est pas le cas, proposez une modification de la géométrie du bateau qui permettrait au bateau de flotter. Aucun calcul n'est attendu.

Partie C – Probabilités

Le bon fonctionnement du bateau est lié à la durée de fonctionnement du bloc de propulsion et de la batterie.

1. La durée de fonctionnement de la batterie en heure suit une loi normale d'espérance 1,5 et d'écart type 0,5. Calculer la probabilité que la batterie fonctionne au moins 1 heure. Arrondir à 10^{-3}.

2. La durée de fonctionnement en heure du bloc de propulsion est assimilable à une loi exponentielle de paramètre 0,2. Calculer la probabilité que le bloc moteur fonctionne correctement durant la première heure. Arrondir à 10^{-3}.

3. On suppose que les événements « panne du bloc de propulsion » et « panne de la batterie » sont indépendants. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune panne durant la première heure d'utilisation. Arrondir à 10^{-3}.

<u>FORMULAIRE :</u>

<u>Loi exponentielle</u>
La fonction de densité f de la loi exponentielle est définie pour tout réel t positif par :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ où } \lambda \text{ est un paramètre réel.}$$