BTS OPTICIEN LUNETIER

MATHÉMATIQUES

Session 2019

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

L'usage de tout modèle de calculatrice avec ou sans mode examen est autorisé.

Tout autre matériel est interdit.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 (10 points)

Le traitement de certaines infections touchant l'intérieur de l'œil nécessite l'administration d'antibiotiques. Dans cet exercice, on étudie l'évolution au cours du temps de la concentration d'un antibiotique chez un patient, en envisageant plusieurs modes d'administration.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

***A.* Administration par intraveineuse – Étude d'une équation différentielle**

On modélise la concentration plasmatique de l'antibiotique dans le sang, exprimée en µg.L^{-1}, en fonction du temps, exprimé en heure, lors d'une injection par intraveineuse, par une fonction solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0{,}2\,y = 0\,,$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et y' sa fonction dérivée.
La concentration initiale de l'antibiotique est 20 µg.L^{-1}.

1° a) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$a\,y' + b\,y = 0$	$f(t) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$

b) Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale.

Cette fonction f modélise la concentration plasmatique de l'antibiotique dans le sang.

2° On appelle demi-vie d'un médicament, la durée, en heure, à l'issue de laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.

a) Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation $\mathrm{e}^{-0{,}2\,t} = 0{,}5$.

b) En déduire la demi-vie de cet antibiotique. On arrondira ce résultat à la minute.

3° En pharmacologie, l'aire sous la courbe de la fonction correspondant à la concentration plasmatique est utilisée pour comparer la biodisponibilité d'un médicament entre deux dosages ou modes d'administration différents, le mode d'administration par intraveineuse étant celui de référence.

a) Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0, +\infty[$ de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(t) = 20\,\mathrm{e}^{-0{,}2\,t}$.

b) Montrer que l'aire, en unité d'aire, limitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = 0$ et $t = 15$, vaut $100(1 - \mathrm{e}^{-3})$.

B. Administration par voie orale – Étude d'une fonction

On admet que la concentration plasmatique dans le sang de l'antibiotique étudié, lorsqu'il est administré par voie orale, peut être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$g(t) = 20\left(\mathrm{e}^{-0,2t} - \mathrm{e}^{-2t}\right),$$

où t représente la durée, en heure, écoulée depuis l'instant initial et $g(t)$ la concentration, en µg.L^{-1}, de l'antibiotique dans le sang.

1° **a)** Montrer que, pour tout nombre t de l'intervalle $[0, +\infty[$,

$$g'(t) = 40\,\mathrm{e}^{-2t}\left(1 - 0,1\,\mathrm{e}^{1,8t}\right).$$

b) Un logiciel de calcul formel fournit le résultat suivant. Ce résultat est admis et peut être utilisé dans cette question.

1

$$\text{Résoudre}\left(1 - 0.1\,e^{1.8t} > 0, t\right)$$

$$\rightarrow \left\{\frac{5}{9}\ln(10) > t\right\}$$

Étudier le signe de $g'(t)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

c) Donner les variations de la fonction g.

d) En déduire la concentration plasmatique maximale (donner la valeur approchée arrondie au dixième).

2° La « biodisponibilité absolue » entre deux valeurs est ici le quotient de l'aire sous la courbe associée à l'administration par voie orale par l'aire sous la courbe associée à l'administration intraveineuse.
On rappelle que l'administration intraveineuse a été étudiée dans la partie *A*. On admet que l'aire sous la courbe associée à l'administration par voie orale et délimitée par les droites d'équations $t = 0$, $t = 15$ et l'axe des abscisses, est environ 85,02 unités d'aire.

Calculer la biodisponibilité absolue de cet antibiotique. Exprimer le résultat en pourcentage.

C. Administration répétée par intraveineuse – Étude d'une suite

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose d'antibiotique par voie intraveineuse. L'intervalle de temps entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, arrondi à la dizaine de minutes, soit 3 h 30. Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration d'antibiotique de 20 µg.L^{-1}.
On modélise la concentration de l'antibiotique, exprimée en µg.L^{-1}, immédiatement après la n-ième injection par la suite (u_n) définie par :

$u_1 = 20$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $u_{n+1} = 0,5\,u_n + 20$.

1° Quelle est la concentration plasmatique de l'antibiotique immédiatement après la deuxième injection ?

2° On pose, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $v_n = u_n - 40$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) On fournit les formules suivantes.

Suite géométrique de raison q	Terme général
$v_{n+1} = q \times v_n$	$v_n = v_0 \times q^n$ ou $v_n = v_1 \times q^{n-1}$

En déduire une expression de u_n en fonction de n.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, u_n peut s'écrire :

$$u_n = 40 - 40 \times 0{,}5^n.$$

d) En déduire la limite de la suite (u_n).

3° On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique immédiatement après une injection dépasse 38 µg.L^{-1}. L'objectif de cette question est de déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cette valeur.

a) On donne l'algorithme incomplet suivant :

```
n ← 1
u ← …
Tant que …
        n ← n + 1
        u ← …
Fin de Tant que
```

Remarque : dans cet algorithme n ← 1 *signifie que n prend la valeur 1.*

Recopier et compléter l'algorithme pour que la variable n en fin d'algorithme contienne le nombre minimal cherché.

b) Déterminer, en expliquant votre démarche, le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

EXERCICE 2 (10 points)

Une entreprise fabrique des meuleuses de verre.

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante. Dans cet exercice, sauf mention du contraire, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

A. Loi exponentielle

Pour le type de meuleuse fabriqué par l'entreprise, on considère que la durée de bon fonctionnement entre deux pannes, exprimée en semaine, est modélisée par une variable aléatoire T de loi exponentielle de paramètre λ.

On rappelle les formules suivantes :

Loi exponentielle	
$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$	$E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$

1° Pour ces meuleuses, l'entreprise a constaté que la durée moyenne de bon fonctionnement entre deux pannes est de deux semaines.
Montrer que $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

2° **a)** Calculer la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'une meuleuse entre deux pannes soit inférieure à une semaine.

b) Calculer la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'une meuleuse entre deux pannes soit supérieure à trois semaines.

3° Calculer, pour une meuleuse, le nombre moyen de pannes survenant en une année. On considère qu'une année est constituée de 52 semaines.

B. Loi de Poisson

On note X la variable aléatoire qui, à chaque meuleuse fabriquée, associe le nombre de pannes survenues sur une durée d'un an. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre 26.

1° *Les questions a) et b) suivantes sont des questionnaires à choix multiples. Une seule réponse est correcte. Indiquer sur la copie la réponse correcte. On ne demande aucune justification.*
La réponse correcte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On considère une meuleuse au hasard dans la production.

a) Quelle est la probabilité qu'elle subisse exactement 20 pannes en une année ?

0,034	0,042	0,139	0,922

b) Quelle est la probabilité qu'elle subisse au maximum 22 pannes en une année ?

0,061	0,252	0,748	0,832

2° Une meuleuse sera jugée défaillante à la fin d'une année si elle tombe en panne strictement plus de 40 fois durant l'année. Calculer la probabilité qu'une meuleuse soit jugée défaillante à la fin d'une année.

C. Loi binomiale et loi normale

On admet que, dans la production de meuleuses, la probabilité que l'une d'entre elles soit jugée défaillante après une année de fonctionnement est 0,004.
Un client de l'entreprise se fait livrer 1000 meuleuses. On considère que la production de meuleuses est suffisamment importante pour que la livraison de ces 1000 meuleuses soit assimilée à un tirage au hasard avec remise dans la production.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque livraison de 1000 meuleuses, associe le nombre de meuleuses jugées défaillantes après une année de fonctionnement.

1° Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2° On admet que l'on peut approcher la loi de probabilité de la variable aléatoire Y par une loi normale.

a) Calculer la moyenne et l'écart type de cette loi normale. Donner, pour l'écart type, le résultat approché arrondi à 10^{-1}.

b) On note Z une variable aléatoire de loi normale de moyenne 4 et d'écart type 2.
À l'aide de l'approximation précédente, estimer la probabilité qu'il y ait entre 3 et 7 meuleuses mises au rebut après une année de fonctionnement dans une livraison de 1000 meuleuses, c'est-à-dire calculer $P(2{,}5 \leq Z \leq 7{,}5)$.

D. Intervalle de confiance

L'entreprise qui produit les meuleuses organise une enquête de satisfaction auprès de ses clients. Elle voudrait estimer la proportion inconnue p de clients satisfaits.
Pour cela, elle interroge au hasard un échantillon de 100 clients parmi l'ensemble de sa clientèle ayant acheté des meuleuses. Cette clientèle est suffisamment importante pour considérer que cet échantillon résulte d'un tirage avec remise.
Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon ainsi prélevé, associe la fréquence, dans cet échantillon, des clients satisfaits. On suppose que F suit la loi normale de moyenne p inconnue et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$.
On fournit la formule suivante :

Intervalle de confiance d'une proportion à 99 %
$\left[f - 2{,}58\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\ ,\ f + 2{,}58\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\right]$

Pour l'échantillon prélevé, on constate que 85 clients sont satisfaits.

1° Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.

2° Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p avec le coefficient de confiance 99 %.

3° Peut-on affirmer que p est compris dans cet intervalle de confiance ? Pourquoi ?