BACCALAUREAT PROFESSIONNEL
M.A.V.E.L.E.C.
Session 2001

E1.B1 MATHEMATIQUES - U 12

Durée : 2 heures ***Coefficient : 2,5***

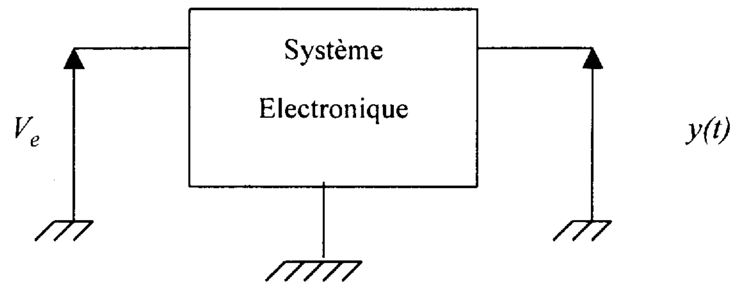
SOMMAIRE

Ce sujet comporte :
- *1 page de garde*
- *3 pages d'énoncé **(1/5 - 2/5 - 3/5)***
- *1 annexe à rendre avec la copie **(4/5)***
- *1 formulaire **(5/5)***

Précisez sur la copie d'examen le numéro des questions traitées

0106-MAV ST B
(Métropôle - La Réunion)

Un circuit électronique a une tension d'entrée V_e et une tension de sortie $y(t)$ qui dépend du temps t.



Les quatre parties du sujet sont indépendantes.

Première partie : 6 points

Pour une valeur fixée de la fréquence, la fonction de transfert du circuit ci-dessus a pour expression :

$$T = \frac{1}{(1+0{,}5j)^2}$$

où j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

a) Donner le conjugué de ($1 + 0{,}5j$).

b) Calculer ($1 + 0{,}5j$) ($1 - 0{,}5j$).

c) En utilisant les résultats précédents, montrer que $T = 0{,}48 - 0{,}64j$.

d) Calculer le module de T, noté $|T|$.

e) Calculer un argument de T arrondi au degré.

Deuxième partie : 7 points

Le module $|T(\omega)|$ de la fonction de transfert du circuit est donné par la relation suivante où la variable ω désigne la pulsation :

$$| \ T(\omega) \ | = \frac{1}{1+10^{-10}\omega^2} .$$

1. Etude d'une fonction :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0\,;10^5\right]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+10^{-10}\times x^2}$.

a) Compléter le tableau de valeurs de l'annexe 1.
Arrondir les valeurs approchées au centième.

b) Montrer en utilisant la formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$

que la dérivée f' de la fonction f est définie sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 10^5]$ par

$$f'(x) = \frac{-2\times 10^{-10}x}{(1+10^{-10}x^2)^2} .$$

c) Compléter, en annexe 1, le tableau de variation de la fonction f.

d) Calculer $f'(0)$.

e) Que peut-on en déduire pour la tangente à la représentation graphique de f au point d'abscisse $x = 0$?

f) Tracer la représentation graphique de f dans le repère de l'annexe 1.

2. Exploitation pour le circuit électrique.

Déterminer graphiquement la valeur de la pulsation pour laquelle le module de la fonction de transfert est égal à 0,7.
Laisser apparents les traits de construction permettant la lecture graphique.

Troisième partie : 3 points

Le gain, en décibel, de la fonction de transfert a pour expression en fonction de la pulsation ω :

$$G(\omega) = 20\log\left(\frac{1}{1+10^{-10}\times\omega^2}\right).$$

a) Montrer que le gain peut se mettre sous la forme :

$$G(\omega) = -\,20\log\left(1+10^{-10}\times\omega^2\right).$$

b) Déterminer par le calcul la valeur de la pulsation ω, arrondie à l'unité, pour laquelle le gain $G(\omega)$ est égal à $-\,3$ dB.

Quatrième partie : 4 points

On suppose que la tension $y(t)$ en volt à la sortie du circuit a pour expression en fonction du temps t ($t \geq 0$) :

$$y(t) = -5\cos(10^5 t) + 5$$

a) Montrer qu'une des primitives de la fonction y est la fonction Y définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$Y(t) = 5t - 5\times10^{-5}\sin(10^5 t).$$

b) Calculer la valeur moyenne Y_{moyen} entre les instants $t_1 = 0$ et $t_2 = 0{,}02\,\pi$ en utilisant la formule

$$Y_{moyen} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} y(t)dt.$$

ANNEXE 1

à rendre avec la copie

Deuxième partie

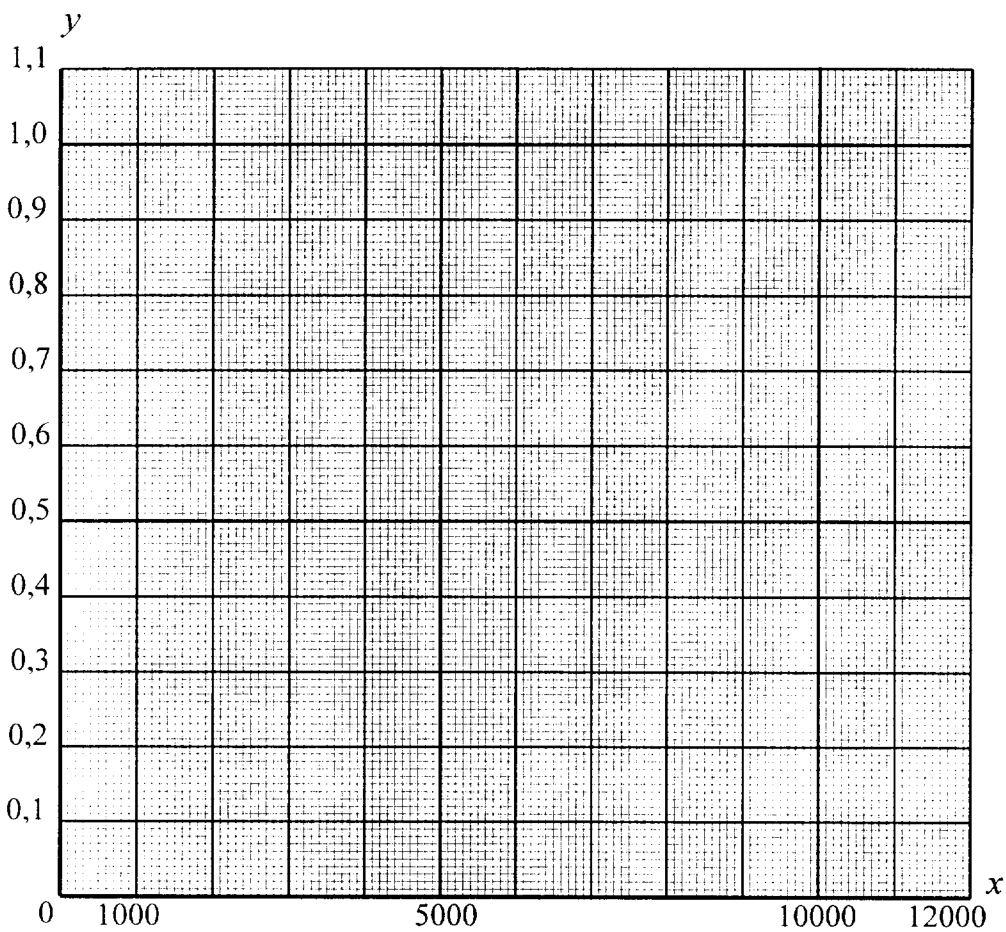
a) Tableau de valeurs :

x	0	2×10^4	4×10^4	6×10^4	8×10^4	10^5
$f(x)$		0,96			0,61	

b) Tableau de variation :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 10^5
$f'(x)$	
$f(x)$	

c) Représentation graphique :



FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAUREAT PROFESSIONNEL
Secteur industriel : Métiers de l'électricité
(Arrêté du 9 mai 1995 - BO spécial n°11 du 15 juin 1995)

Fonction f	Dérivée f'
$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
e^{ax+b}	ae^{ax+b}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$a\,u(x)$	$a\,u'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

Equation du second degré $ax^2+bx+c=0$

$\Delta = b^2-4ac$

- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

- Si $\Delta = 0$, une solution réelle double :

$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

- Si $\Delta < 0$, aucune solution réelle

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Suites arithmétiques

Terme de rang 1 : u_1 et raison r

Terme de rang n : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Somme des k premiers termes :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k = \frac{k(u_1+u_k)}{2}$$

Suites géométriques

Terme de rang 1 : u_1 et raison q

Terme de rang n : $u_n = u_1 q^{n-1}$

Somme des k premiers termes :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k = u_1\frac{1-q^k}{1-q}$$

Logarithme népérien : ln

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\qquad \ln(a^n) = n\ln a$

$\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

Equations différentielles

$y' - ay = 0 \qquad y = ke^{ax}$

$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad y = a\cos\omega x + b\sin\omega x$

Trigonométrie

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

$\quad = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

Nombres complexes ($j^2 = -1$)

forme algébrique	forme trigonométrique
$z = x + jy$	$z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$
$\bar{z} = x - jy$	$z = \rho(\cos\theta - j\sin\theta)$
$\lvert z\rvert = \sqrt{x^2+y^2}$	$\rho = \lvert z\rvert$
	$\theta = \arg(z)$

Calcul vectoriel dans le plan

$\vec{v}.\vec{v}' = xx' + yy'$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}' \neq \vec{0}$:

$\vec{v}.\vec{v}' = \|\vec{v}\| \times \|\vec{v}'\| \cos(\vec{v}, \vec{v}')$

$\vec{v}.\vec{v}' = 0$ si et seulement si $\vec{v} \perp \vec{v}'$

Aires dans le plan

Triangle : $\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$ $\qquad$ Trapèze : $\frac{1}{2}(B+b)h$

Disque : πR^2

Aires et volumes dans l'espace

Cylindre de révolution ou prisme droit d'aire de base B et de hauteur h : Volume Bh

Sphère de rayon R :

Aire : $4\pi R^2$ $\qquad$ Volume : $\frac{4}{3}\pi R^3$

Cône de révolution ou pyramide de base B et de hauteur h : Volume $\frac{1}{3}Bh$

Calcul intégral

* Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

* $\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$

* $\int_a^b kf(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt$