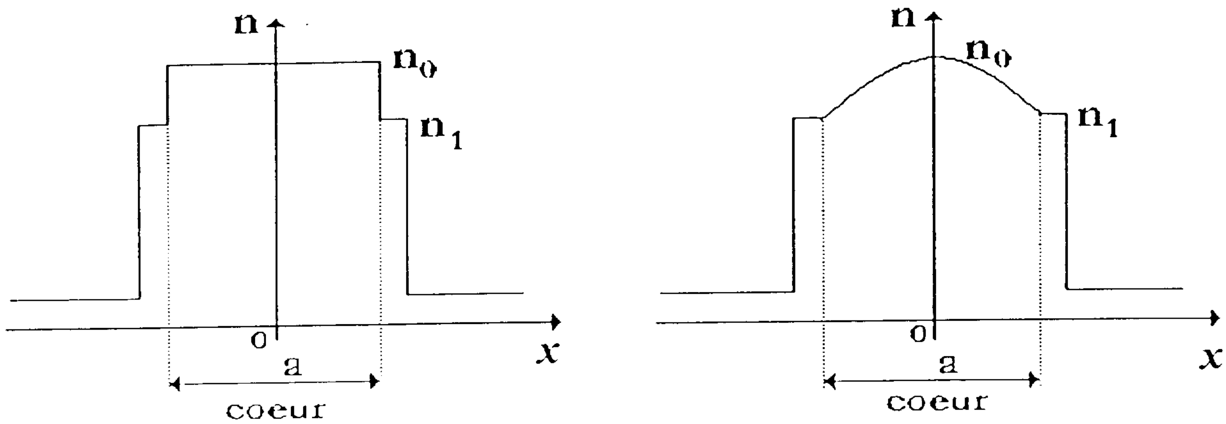
## EXERCICE I :

CALCUL DU NOMBRE DE MODES DANS UNE FIBRE OPTIQUE (5 points)

**On distingue deux sortes de fibres optiques, suivant que l'indice de réfraction du cœur est constant ou varie graduellement en fonction de la distance $x$ au centre de la fibre (cf. figure ci-dessous). Le calcul du nombre de modes se propageant dans la fibre dépend de la nature de celle-ci.**




a/ Fibre à saut d'indice

b/ Fibre à gradient d'indice

Figure - Profil de l'indice de réfraction n suivant le type de fibre

**Dans toute la suite, on désigne par : $n_0$, l'indice de réfraction au centre du cœur de la fibre,**
**$n_1$, l'indice de réfraction de la gaine de la fibre,**
**a, le diamètre du cœur de la fibre et**
**$\lambda$, la longueur d'onde de la source d'éclairage.**

**1) Fibre à saut d'indice**

**Le nombre de modes dans une fibre à saut d'indice, $N_s$, est donné par la relation :**

$$N_s = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\left(n_0^2 - n_1^2\right) \times I_s \qquad \text{où } I_s \text{ désigne l'intégrale : } I_s = \int_0^a x\,dx.$$

Calculer $I_s$ en fonction de $a$.

**2) Fibre à gradient d'indice**

**Le nombre de modes dans une fibre à gradient d'indice, $N_g$, est donné par la relation :**

$$N_g = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\left(n_0^2 - n_1^2\right) \times I_g, \quad \text{avec } I_g = \frac{a^2}{4}$$

Quelle relation peut-on écrire entre $N_g$ et $N_s$ ?

**3) Application numérique**

**Finalement, on obtient comme expression pour $N_s$ et $N_g$ en fonction de $n_0$, $n_1$, $\lambda$ et $a$ :**

$$N_s = \frac{2\pi^2}{\lambda^2}\left(n_0^2 - n_1^2\right) \times a^2, \qquad \text{avec } N_g = \frac{N_s}{2}$$

**Les caractéristiques communes des deux fibres et de l'éclairage sont les suivantes :**

| | |
|---|---|
| $n_1 = 1{,}47$ | $n_0 - n_1 = 0{,}01$ |
| $\lambda = 0{,}85\ \mu\text{m}$ | $a = 50\ \mu\text{m}$. |

**a)** Calculer le nombre de modes, $N_s$, dans la fibre à saut d'indice. Arrondir le résultat à l'entier inférieur.

**b)** Calculer le nombre de modes, $N_g$, dans la fibre à gradient d'indice. Arrondir le résultat à l'entier inférieur.

## EXERCICE II : ÉTUDE D'UNE FONCTION (7 points)

**Lors de la charge d'un condensateur les variations de la tension à ses bornes peuvent être décrites par la fonction $f$, de la variable temps t, définie sur l'intervalle $[0 ; 0{,}12]$ par :**

$$f : t \mapsto 12\left(1 - e^{-50t}\right).$$

**Le temps est exprimé en secondes et la tension en volts.**

**1) Étude des variations de $f$ :**

**a)** Calculer la fonction dérivée de $f$, notée $f'$.

**b)** Étudier le signe de $f'$ sur $[0;0{,}12]$.

**c)** Construire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;0{,}12]$.

**2) Courbe représentative de $f$ : $C_f$**

**a)** Compléter le tableau sur l'annexe à rendre avec la copie, en donnant les valeurs approchées à $10^{-2}$ près.

**b)** Construire, sur l'annexe à rendre avec la copie, la représentation graphique $C_f$ sur l'intervalle $[0\,;0{,}12]$.

Le repère choisi a pour unités graphiques : en abscisse, 1 cm pour 0,01 unité
en ordonnée, 1 cm pour 1 unité.

**3) Temps de charge du condensateur**

**a)** Quelle est, en volts, la tension aux bornes du condensateur complètement chargé ?

**b)** Déterminer graphiquement l'instant $t_0$ auquel le condensateur est chargé à 80 % de la valeur maximale.

**c)** Résoudre l'équation $f(t) = 0{,}8 \times 12$

En déduire une valeur approchée de $t_0$ à la milliseconde près.

## EXERCICE III : ÉTUDE D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE ET DE SON SPECTRE (8 points)

**Le polynôme de Fourier d'ordre n d'un signal périodique est donné par :**

$P_n(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\,\omega t) + b_2 \sin(2\,\omega t) + \ldots + a_n \cos(n\,\omega t) + b_n \sin(n\,\omega t)$

**Un signal temporel s est périodique, de période T. Le polynôme de Fourier d'ordre 5 associé à ce signal est le suivant :**

$$P_5(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(100\,\pi t) - \frac{4}{9\pi}\cos(300\,\pi t) - \frac{4}{25\pi}\cos(500\,\pi t).$$

**1) Exploitation du polynôme de Fourier d'ordre 5 : $P_5(t)$**

**a)** Quel terme représente l'harmonique fondamentale ?

**b)** En déduire la pulsation $\omega$, la fréquence $f$ et la période T du signal.

**c)** Quelle est la composante continue $a_0$ de ce signal ?

**d)** Identifier les coefficients de Fourier : $a_k$ et $b_k$, pour k variant de 1 à 5.

**2) Représentation spectrale**

**a)** Calculer l'amplitude des raies spectrales $C_k$ pour k variant de 1 à 5.

**b)** Construire sur l'annexe à rendre avec la copie, la représentation spectrale du signal pour les fréquences comprises dans l'intervalle $[0\,;250\text{Hz}]$.

***On rappelle que l'amplitude de la raie d'ordre k est donnée par la relation***

$$\mathbf{C_k = \sqrt{a_k^{\,2} + b_k^{\,2}}}.$$

**3) Énergie du spectre $E_s$**

Calculer l'énergie transportée par les 5 premiers harmoniques du spectre : $E_5$.
Donner le résultat avec une précision de $10^{-3}$.

Formule de Parseval : $E_n = a_0^{\,2} + \frac{1}{2}\left[a_1^{\,2} + b_1^{\,2} + \ldots + a_k^{\,2} + b_k^{\,2} + \ldots + a_n^{\,2} + + a_n^{\,2}\right]$

**4) Énergie du signal E**

**Sur une période ce signal est défini par :**

$s(t) = -\,100\pi\, t \qquad \text{si } t \in [-0.01\,;0[$

$s(t) = +\,100\pi\, t \qquad \text{si } t \in [0\,;\,0{,}01[$

Le temps est exprimé en seconde.

L'énergie du signal est donnée par l'intégrale : $E = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t)\,dt.$

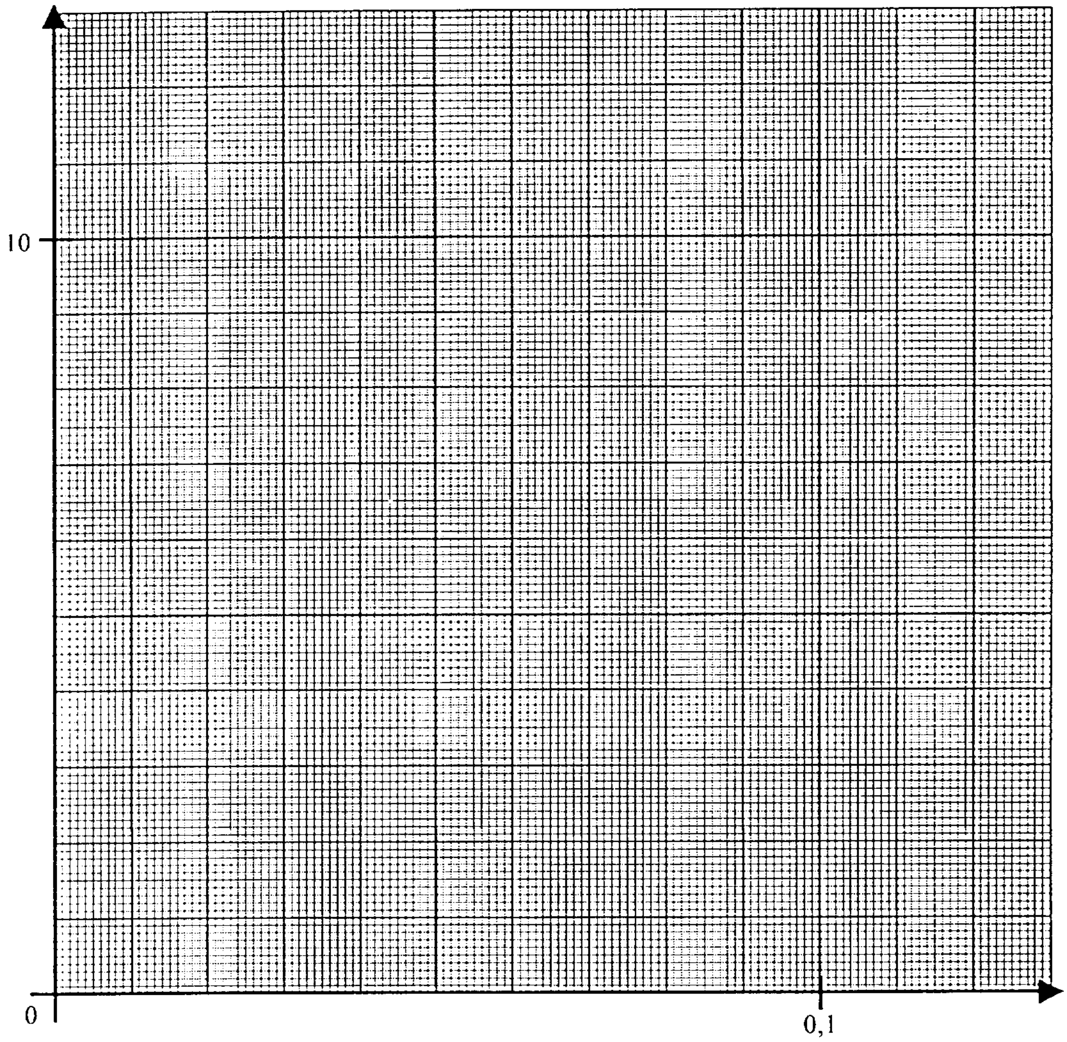
**a)** Calculer E.
Montrer que sa valeur approchée à $10^{-3}$ près est 3,290 J.

**b)** Calculer $\dfrac{E_s}{E}$.
Quelle est, en pourcentage, l'énergie relative transportée par les 5 premiers harmoniques du spectre ?

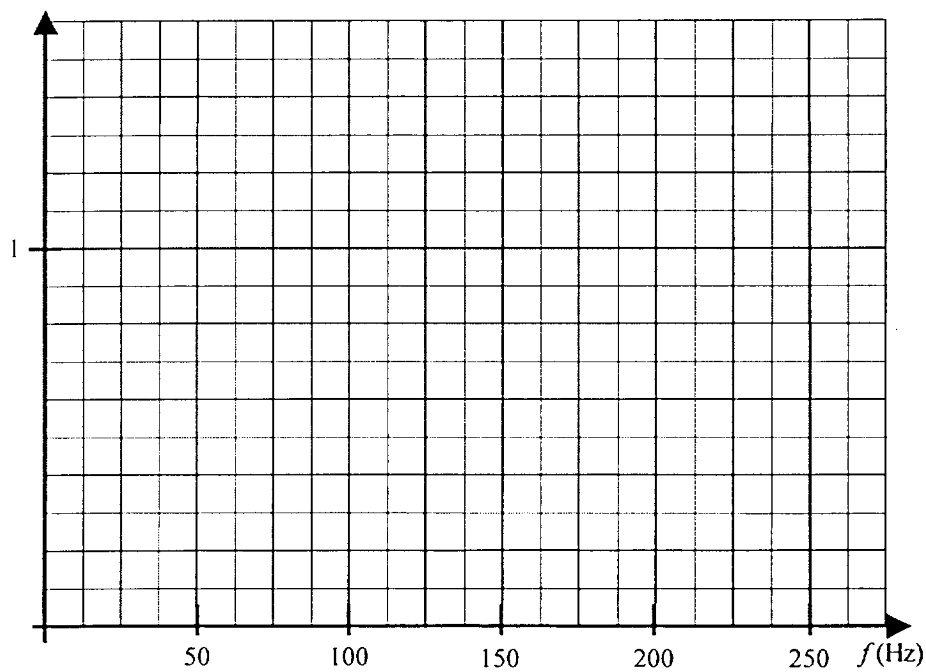
**ANNEXE à rendre avec la copie**

## Exercice II

| t | 0 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,07 | 0,09 | 0,12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$(t) | | | | | | | | | | |




## Exercice III



# FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAUREAT PROFESSIONNEL

**Secteur industriel : Métiers de l'électricité**

( Arrêté du 9 mai 1995 - BO spécial n°11 du 15 juin 1995 )

| Fonction $f$ | Dérivée $f'$ |
|---|---|
| $f(x)$ | $f'(x)$ |
| $ax+b$ | $a$ |
| $x^2$ | $2x$ |
| $x^3$ | $3x^2$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ |
| $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $e^{ax+b}$ | $ae^{ax+b}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $u(x)+v(x)$ | $u'(x)+v'(x)$ |
| $a\,u(x)$ | $a\,u'(x)$ |
| $u(x)v(x)$ | $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ |
| $\dfrac{1}{u(x)}$ | $-\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$ |
| $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ | $\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ |

Equation du second degré $ax^2+bx+c=0$

$\Delta = b^2-4ac$

- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, une solution réelle double :

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, aucune solution réelle

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Suites arithmétiques

Terme de rang 1 : $u_1$ et raison $r$

Terme de rang $n$ : $u_n=u_1+(n-1)r$

Somme des $k$ premiers termes :

$$u_1+u_2+\cdots+u_k = \frac{k(u_1+u_k)}{2}$$

Suites géométriques

Terme de rang 1 : $u_1$ et raison $q$

Terme de rang $n$ : $u_n=u_1q^{n-1}$

Somme des $k$ premiers termes :

$$u_1+u_2+\cdots+u_k = u_1\frac{1-q^k}{1-q}$$

Logarithme népérien : ln

$\ln(ab)=\ln a+\ln b$ $\qquad \ln(a^n)=n\ln a$

$\ln(a/b)=\ln a-\ln b$

Equations différentielles

$y'-ay=0 \qquad y=ke^{ax}$

$y''+\omega^2y=0 \qquad y=a\cos\omega x+b\sin\omega x$

Trigonométrie

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\cos 2a=2\cos^2 a-1$

$\quad =1-2\sin^2 a$

$\sin 2a=2\sin a\cos a$

Nombres complexes ($j^2=-1$)

| forme algébrique | forme trigonométrique |
|---|---|
| $z=x+jy$ | $z=\rho(\cos\theta+j\sin\theta)$ |
| $\bar{z}=x-jy$ | $z=\rho(\cos\theta-j\sin\theta)$ |
| $\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$ | $\rho=\lvert z\rvert$ |
| | $\theta=\arg(z)$ |

Calcul vectoriel dans le plan

$\vec{v}.\vec{v}'=xx'+yy'$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

Si $\vec{v}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}'\neq\vec{0}$ :

$\vec{v}.\vec{v}'=\|\vec{v}\|\times\|\vec{v}'\|\cos(\vec{v},\vec{v}')$

$\vec{v}.\vec{v}'=0$ si et seulement si $\vec{v}\perp\vec{v}'$

Aires dans le plan

Triangle : $\frac{1}{2}bc\sin \text{A}$ $\qquad$ Trapèze : $\frac{1}{2}(B+b)h$

Disque : $\pi R^2$

Aires et volumes dans l'espace

Cylindre de révolution ou prisme droit d'aire de base $B$ et de hauteur $h$ : Volume $Bh$

Sphère de rayon $R$ :

Aire : $4\pi R^2$ $\qquad$ Volume : $\frac{4}{3}\pi R^3$

Cône de révolution ou pyramide de base $B$ et de hauteur $h$ : Volume $\frac{1}{3}Bh$

Calcul intégral

* Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\int_b^c f(t)\mathrm{d}t$$

* $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$

* $\displaystyle\int_a^b kf(t)\mathrm{d}t=k\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$