BACCALAUREAT PROFESSIONNEL
«M.A.V.E.L.E.C».et «M.R.I.M»
Session 2003

E1.B1 MATHEMATIQUES - U 12

Durée : 2 heures ***Coefficient : 2,5***

SOMMAIRE

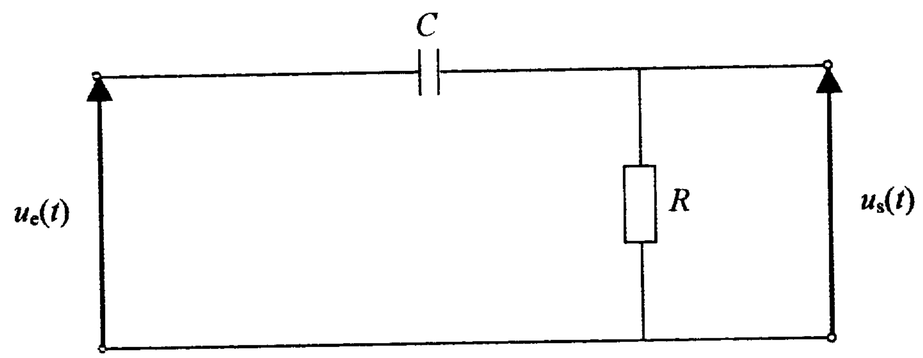
Ce sujet comporte : *- 5 pages d'énoncé + annexe*
- 1 formulaire

Précisez sur la copie d'examen le numéro des questions traitées

0306-MAV ST B
0306-MIR ST 12
(Métropole - La Réunion)

EXERCICE 1 (sur 6 points) : « Etude d'un circuit : filtre passe-haut ».

On donne ci-dessous le schéma d'un circuit, constitué d'un condensateur de capacité $C = 9{,}2 \times 10^{-9}$ F et d'un dipôle résistif de résistance $R = 10^3\ \Omega$.



On admet que les tensions $u_e(t)$ (tension d'entrée) et $u_s(t)$ (tension de sortie) sont des tensions sinusoïdales de même pulsation ω définies en fonction du temps t .

A. Détermination de la fréquence de coupure.

La fréquence de coupure notée f_0 , en hertz (Hz) du filtre est donnée par la relation :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \quad \text{avec } R \text{ en ohm } (\Omega) \text{ et } C \text{ en farad (F)} .$$

Calculer f_0 en kHz . Arrondir à 10^{-1}

B. Calcul d'un gain en décibel (dB) .

La fonction de transfert de ce filtre est définie par la grandeur complexe T avec :

$$\mathrm{T} = \frac{R}{R + \frac{1}{C\omega \mathrm{j}}}$$ où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. On pose : $x = RC\omega$.

Montrer que T peut s'écrire $\mathrm{T} = \frac{x\mathrm{j}}{x\mathrm{j}+1}$.

2. On note $|\mathrm{T}|$ le module de T .

Montrer que $|\mathrm{T}| = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Le gain G exprimé en décibel (dB) est une grandeur définie par :

$$G = 20 \log |T| \quad \text{où log est le logarithme décimal .}$$

On admet que la fréquence des tensions $u_e(t)$ et $u_s(t)$ est f = 10 kHz .

a) Donner la valeur de la pulsation ω (en rad/s) en exprimant le résultat sous forme d'un multiple du nombre π .

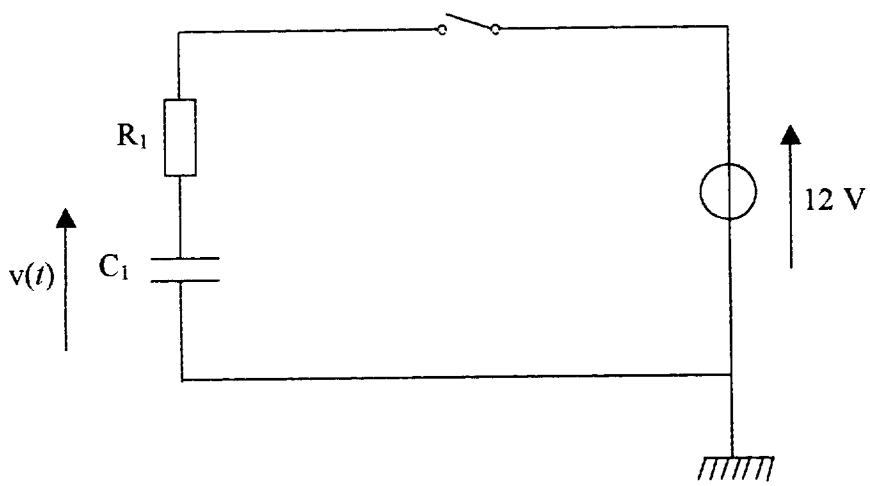
b) Calculer la valeur de x arrondie à 10^{-3} .

c) Calculer la valeur de $|T|$ arrondie à 10^{-1} .

d) En déduire la valeur du gain G arrondie à 10^{-1} dB .

EXERCICE 2 (sur 14 points) : « Etude d'un régime transitoire » .

On considére le circuit dont le schéma est représenté ci-dessous :



Ce circuit comprend en série, un condensateur de capacité $C_1 = 10^{-7}$ F, un dipôle résistif de résistance $R_1 = 5 \times 10^3\ \Omega$, un interrupteur, un générateur de tension continue égale à 12 V .

Le condensateur est initialement chargé sous une tension égale à -6 V .
A l'instant $t = 0$,on ferme l'interrupteur, la tension v(t) aux bornes du condensateur varie en fonction du temps t .

L'étude qui suit, permet de déterminer l'expression de v(t), de connaître à partir de quel instant la tension v(t) devient positive et de calculer l'énergie dissipée par le dipôle résistif entre deux instants donnés .

A. Equation différentielle

A chaque instant t, en seconde, avec $t \geq 0$, la tension $v(t)$, en volt, vérifie la relation

$$R_1 C_1 v'(t) + v(t) = 12 \quad (1) \quad \text{où } v' \text{ est la dérivée de la fonction } v.$$

1. Montrer que l'équation différentielle (1) s'écrit :

$$v'(t) + 2\,000\, v(t) = 24\,000 \quad (2) \ .$$

2. On considère l'équation différentielle « sans second membre » (3) :

$$v'(t) + 2\,000\, v(t) = 0 \quad (3)$$

- **a)** Ecrire l'équation différentielle (3) sous la forme $u'(t) - a\, u(t) = 0$ du formulaire, où a est une constante à déterminer.
- **b)** En déduire la solution générale de l'équation différentielle « sans second membre » (3).

3. Vérifier que la fonction constante f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = 12$ est une solution particulière de l'équation différentielle (2).

4. On admet que la solution générale de l'équation différentielle (2) est la somme de la solution générale de l'équation différentielle « sans second membre » (3) et de la solution particulière de l'équation différentielle (2) définie à la question **3**.

- a) En déduire la solution générale de l'équation différentielle (2).
- b) Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (2) qui vérifie la condition initiale $v(0) = -6$.

B. Etude et représentation graphique de la fonction v

Soit la fonction v définie sur l'intervalle $[0\,;2\times 10^{-3}]$ par $v(t) = -18\, e^{-2\,000\, t} + 12$.

1. Sachant que $v'(t) = 36\,000\, e^{-2\,000\, t}$ où v' est la dérivée de la fonction v.
   Donner le signe de $v'(t)$ sur l'intervalle $[0\,;2\times 10^{-3}]$. Justifier la réponse.

2. Compléter, sur l'**annexe**, le tableau de valeurs de la fonction v .

3. Compléter, sur l'**annexe**, le tableau de variation de la fonction v sur $[0\,;2\times 10^{-3}]$.

4. On appelle C la courbe représentative de la fonction v, dans le repère de **l'annexe.**

En utilisant les résultats précédents, tracer la courbe C sur **l'annexe** .

5. Par lecture graphique, donner sous forme d'intervalle, les valeurs de t telles que $v(t) \geq 0$.

C. Energie dissipée par le dipôle résistif entre les instants $t = 0$ s et $t = 1$ s

On admet que l'énergie dissipée par effet joule par le dipôle résistif entre les instants $t = 0$ s et $t = 1$ s est :

$$E = \int_0^1 0{,}0648\mathrm{e}^{-4000t}\,\mathrm{d}t \quad \text{avec E en joule (J) et } t \text{ en seconde (s)}.$$

1. Soit la fonction g définie sur $[0 ; 1]$ par $g(t) = 0{,}0648\ \mathrm{e}^{-4000t}$

Donner l'expression $G(t)$ d'une primitive G de la fonction g.

2. Calculer, en utilisant le résultat de la question **1.**, la valeur de E. Arrondir à $1\ \mu$J.

Rappel : $1\ \mu\text{J} = 10^{-6}$ J.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

EXERCICE 2

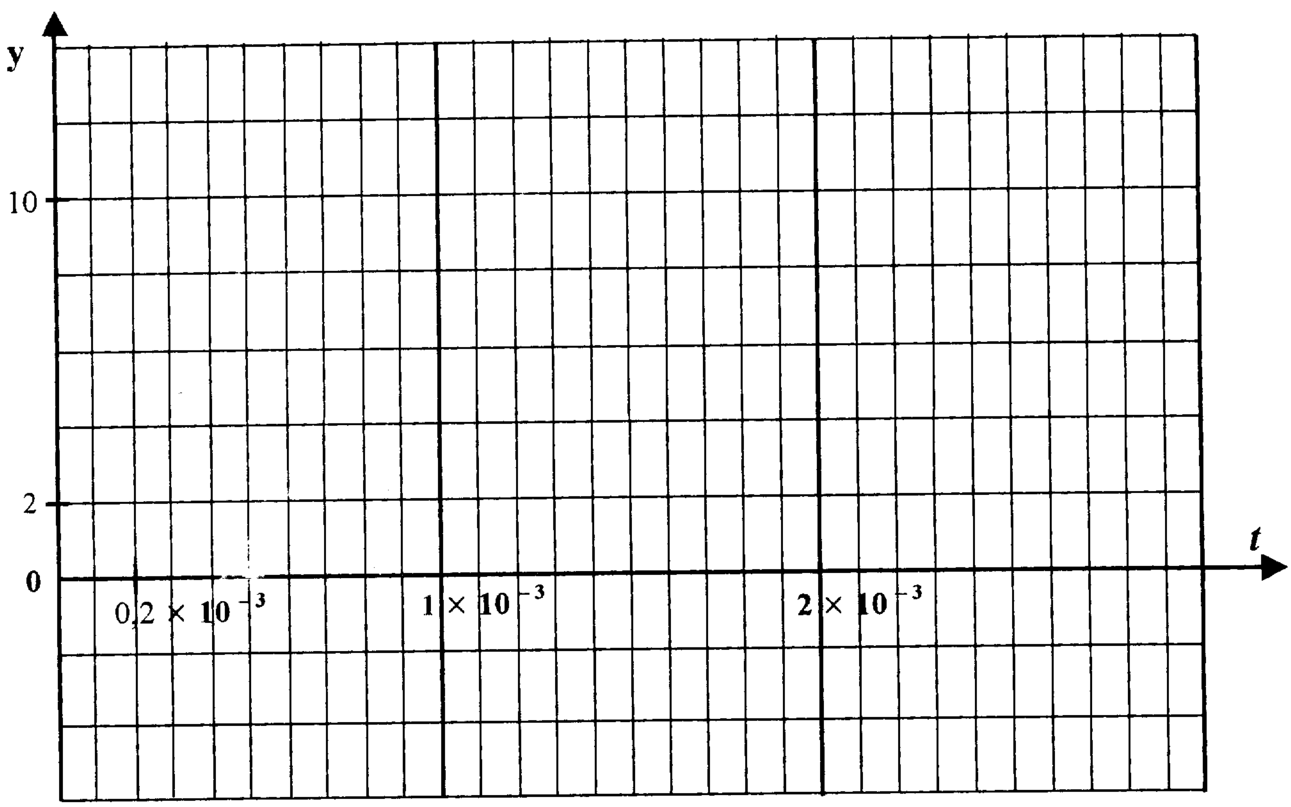
B . 2. Tableau de valeurs **: les valeurs de v(*t*) seront arrondies à l'unité .**

t	0	$0{,}1\times10^{-3}$	$0{,}3\times10^{-3}$	$0{,}9\times10^{-3}$	$1{,}4\times10^{-3}$	2×10^{-3}
$v(t)$	…	…	2	…	…	12

B . 3. Tableau de variation :

t	0 $\qquad\qquad$ 2×10^{-3}
Signe de $v'(t)$	
Variation de v	

B . 4. Représentation graphique de la fonction v :



FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAUREAT PROFESSIONNEL
Secteur industriel : Métiers de l'électricité
(Arrêté du 9 mai 1995 – BO special n°11 du 15 juin 1995)

Fonction f	Dérivée f'
$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
e^{ax+b}	ae^{ax+b}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$a\,u(x)$	$a\,u'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

Equation du second degré $ax^2+bx+c=0$

$\Delta = b^2-4ac$

- Si $\Delta>0$, deux solutions réelles :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta=0$, une solution réelle double :

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta<0$, aucune solution réelle

Si $\Delta\geq 0$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Suites arithmétiques

Terme de rang 1 : u_1 et raison r

Terme de rang n : $u_n=u_1+(n-1)r$

Somme des k premiers termes :

$$u_1+u_2+\ldots+u_k=\frac{k(u_1+u_k)}{2}$$

Suites géométriques

Terme de rang 1 : u_1 et raison q

Terme de rang n : $u_n=u_1q^{n-1}$

Somme des k premiers termes :

$$u_1+u_2+\ldots+u_k=u_1\frac{1-q^k}{1-q}$$

Logarithme népérien : ln

$\ln(ab)=\ln a+\ln b$ $\qquad$ $\ln(a^n)=n\ln a$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$

Equations différentielles

$y'-ay=0 \qquad y=k\,e^{ax}$

$y''+\omega^2y=0 \qquad y=a\cos\omega x+b\sin\omega x$

Trigonométrie

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\cos 2a=2\cos^2 a-1$

$\quad=1-2\sin^2 a$

$\sin 2a=2\sin a\cos a$

Nombres complexes ($j^2=-1$)

forme algébrique	forme trigonométrique
$z=x+jy$	$z=\rho(\cos\theta+j\sin\theta)$
$\bar{z}=x-jy$	$\bar{z}=\rho(\cos\theta-j\sin\theta)$
$\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$	$\rho=\lvert z\rvert$
	$\theta=\arg(z)$

Calcul vectoriel dans le plan

$\vec{v}.\vec{v}'=xx'+yy'$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

Si $\vec{v}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}'\neq\vec{0}$:

$\vec{v}.\vec{v}'=\|\vec{v}\|\times\|\vec{v}'\|\cos(\vec{v},\vec{v}')$

$\vec{v}.\vec{v}'=0$ si et seulement si $\vec{v}\perp\vec{v}'$

Aires dans le plan

Triangle : $\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$ $\qquad$ Trapèze : $\frac{1}{2}(B+b)h$

Disque : πR^2

Aires et volumes dans l'espace

Cylindre de révolution ou prisme droit d'aire de base B et de hauteur h : Volume Bh

Sphère de rayon R :

Aire : $4\pi R^2$ $\qquad$ Volume : $\frac{4}{3}\pi R^3$

Cône de révolution ou pyramide de base B et de hauteur h : Volume $\frac{1}{3}Bh$

Calcul intégral

* Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_b^c f(t)\,dt$$

* $\int_a^b (f+g)(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_a^b g(t)\,dt$

* $\int_a^b kf(t)\,dt=k\int_a^b f(t)\,dt$