

BACCALAUREAT PROFESSIONNEL
«M.A.V.E.L.E.C».et «M.R.I.M»
Session 2003

E1.B1 MATHEMATIQUES - U 12

Durée : 2 heures

Coefficient : 2,5

SOMMAIRE

Ce sujet comporte :

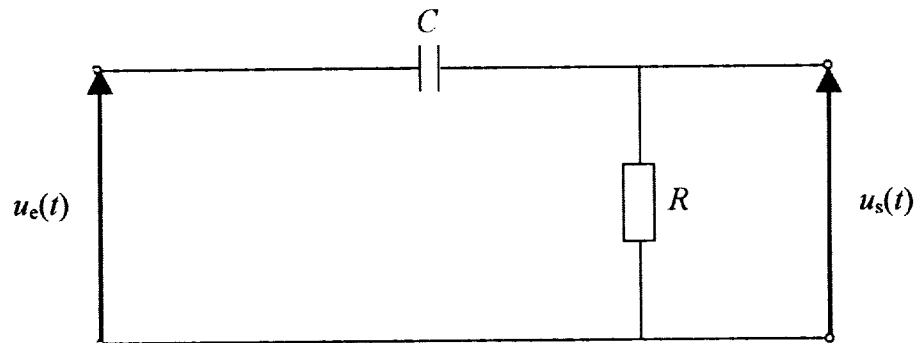
- 5 pages d'énoncé + annexe
- 1 formulaire

Précisez sur la copie d'examen le numéro des questions traitées

0306-MAV ST B
0306-MIR ST 12
(Métropole - La Réunion)

EXERCICE 1 (sur 6 points) : « Etude d'un circuit : filtre passe-haut » .

On donne ci-dessous le schéma d'un circuit, constitué d'un condensateur de capacité $C = 9,2 \times 10^{-9}$ F et d'un dipôle résistif de résistance $R = 10^3 \Omega$.



On admet que les tensions $u_e(t)$ (tension d'entrée) et $u_s(t)$ (tension de sortie) sont des tensions sinusoïdales de même pulsation ω définies en fonction du temps t .

A. Détermination de la fréquence de coupure.

La fréquence de coupure notée f_0 , en hertz (Hz) du filtre est donnée par la relation :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \quad \text{avec } R \text{ en ohm } (\Omega) \text{ et } C \text{ en farad (F) .}$$

Calculer f_0 en kHz . Arrondir à 10^{-1}

B. Calcul d'un gain en décibel (dB).

La fonction de transfert de ce filtre est définie par la grandeur complexe T avec :

$$T = \frac{R}{R + \frac{1}{C\omega j}} \quad \text{où } j \text{ est le nombre complexe de module 1 et d'argument } \frac{\pi}{2} .$$

1. On pose : $x = RC\omega$.

Montrer que T peut s'écrire $T = \frac{xj}{xj+1}$.

2. On note $|T|$ le module de T .

Montrer que $|T| = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Le gain G exprimé en décibel (dB) est une grandeur définie par :

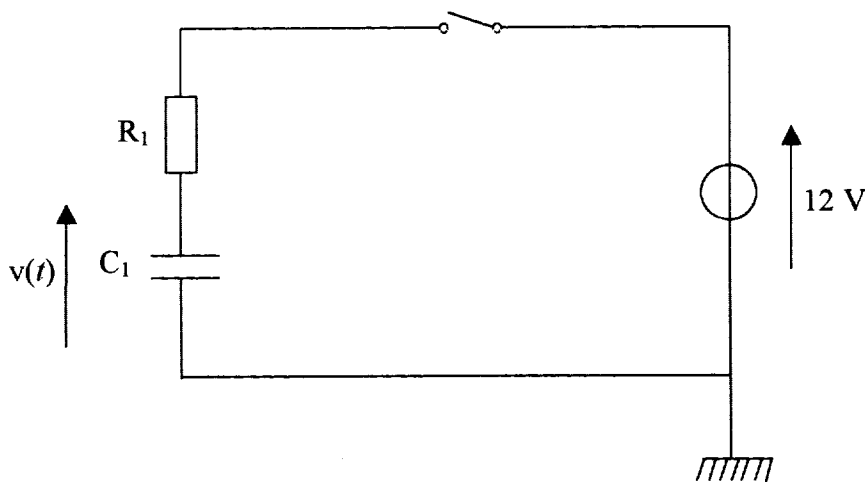
$$G = 20 \log |T| \quad \text{où } \log \text{ est le logarithme décimal .}$$

On admet que la fréquence des tensions $u_e(t)$ et $u_s(t)$ est $f = 10 \text{ kHz}$.

- Donner la valeur de la pulsation ω (en rad/s) en exprimant le résultat sous forme d'un multiple du nombre π .
- Calculer la valeur de x arrondie à 10^{-3} .
- Calculer la valeur de $|T|$ arrondie à 10^{-1} .
- En déduire la valeur du gain G arrondie à 10^{-1} dB .

EXERCICE 2 (sur 14 points) : « Etude d'un régime transitoire » .

On considère le circuit dont le schéma est représenté ci-dessous :



Ce circuit comprend en série, un condensateur de capacité $C_1 = 10^{-7} \text{ F}$, un dipôle résistif de résistance $R_1 = 5 \times 10^3 \Omega$, un interrupteur, un générateur de tension continue égale à 12 V .

Le condensateur est initialement chargé sous une tension égale à -6 V .

A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur varie en fonction du temps t .

L'étude qui suit, permet de déterminer l'expression de $v(t)$, de connaître à partir de quel instant la tension $v(t)$ devient positive et de calculer l'énergie dissipée par le dipôle résistif entre deux instants donnés .

A. Equation différentielle

A chaque instant t , en seconde, avec $t \geq 0$, la tension $v(t)$, en volt, vérifie la relation

$$R_1 C_1 v'(t) + v(t) = 12 \quad (1) \quad \text{où } v' \text{ est la dérivée de la fonction } v.$$

1. Montrer que l'équation différentielle (1) s'écrit :

$$v'(t) + 2\,000 v(t) = 24\,000 \quad (2) .$$

2. On considère l'équation différentielle « sans second membre » (3) :

$$v'(t) + 2\,000 v(t) = 0 \quad (3)$$

- a) Ecrire l'équation différentielle (3) sous la forme $u'(t) - a u(t) = 0$ du formulaire, où a est une constante à déterminer.
- b) En déduire la solution générale de l'équation différentielle « sans second membre » (3).

3. Vérifier que la fonction constante f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 12$ est une solution particulière de l'équation différentielle (2).

4. On admet que la solution générale de l'équation différentielle (2) est la somme de la solution générale de l'équation différentielle « sans second membre » (3) et de la solution particulière de l'équation différentielle (2) définie à la question 3.

- a) En déduire la solution générale de l'équation différentielle (2).
- b) Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (2) qui vérifie la condition initiale $v(0) = -6$.

B. Etude et représentation graphique de la fonction v

Soit la fonction v définie sur l'intervalle $[0 ; 2 \times 10^{-3}]$ par $v(t) = -18 e^{-2\,000 t} + 12$.

1. Sachant que $v'(t) = 36\,000 e^{-2\,000 t}$ où v' est la dérivée de la fonction v .
Donner le signe de $v'(t)$ sur l'intervalle $[0 ; 2 \times 10^{-3}]$. Justifier la réponse.
2. Compléter, sur l'**annexe**, le tableau de valeurs de la fonction v .
3. Compléter, sur l'**annexe**, le tableau de variation de la fonction v sur $[0 ; 2 \times 10^{-3}]$.
4. On appelle C la courbe représentative de la fonction v , dans le repère de l'**annexe**.
En utilisant les résultats précédents, tracer la courbe C sur l'**annexe** .
5. Par lecture graphique, donner sous forme d'intervalle, les valeurs de t telles que $v(t) \geq 0$.

C. Energie dissipée par le dipôle résistif entre les instants $t = 0$ s et $t = 1$ s

On admet que l'énergie dissipée par effet joule par le dipôle résistif entre les instants $t = 0$ s et $t = 1$ s est :

$$E = \int_0^1 0,0648 e^{-4000t} dt \quad \text{avec } E \text{ en joule (J) et } t \text{ en seconde (s) .}$$

1. Soit la fonction g définie sur $[0 ; 1]$ par $g(t) = 0,0648 e^{-4000t}$
Donner l'expression $G(t)$ d'une primitive G de la fonction g .
2. Calculer, en utilisant le résultat de la question 1., la valeur de E . Arrondir à $1 \mu\text{J}$.

Rappel : $1 \mu\text{J} = 10^{-6} \text{ J}$.

EXERCICE 2

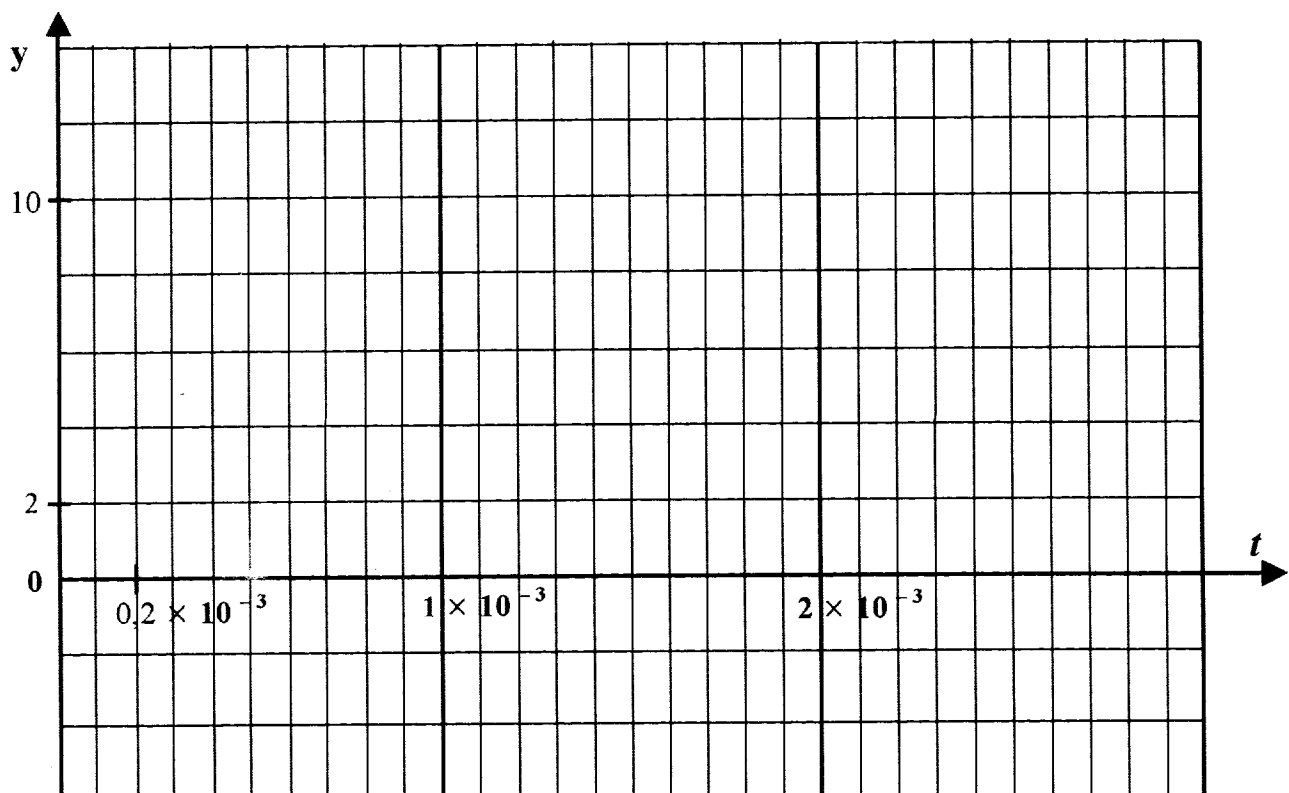
B. 2. Tableau de valeurs : les valeurs de $v(t)$ seront arrondies à l'unité .

t	0	$0,1 \times 10^{-3}$	$0,3 \times 10^{-3}$	$0,9 \times 10^{-3}$	$1,4 \times 10^{-3}$	2×10^{-3}
$v(t)$	2	12

B. 3. Tableau de variation :

t	0	2×10^{-3}
Signe de $v'(t)$		
Variation de v		

B. 4. Représentation graphique de la fonction v :



FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAUREAT PROFESSIONNEL

Secteur industriel : Métiers de l'électricité
(Arrêté du 9 mai 1995 – BO special n°11 du 15 juin 1995)

<u>Fonction f</u>	<u>Dérivée f'</u>
$f(x)$	$f'(x)$
$ax + b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
e^{ax+b}	ae^{ax+b}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin(ax+b)$	$a \cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$-a \sin(ax+b)$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$au(x)$	$a u'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

Equation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, une solution réelle double :

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, aucune solution réelle

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Suites arithmétiques

Terme de rang 1 : u_1 et raison r

Terme de rang n : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Somme des k premiers termes :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k = \frac{k(u_1 + u_k)}{2}$$

Suites géométriques

Terme de rang 1 : u_1 et raison q

Terme de rang n : $u_n = u_1 q^{n-1}$

Somme des k premiers termes :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k = u_1 \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

Logarithme népérien : ln

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(a^n) = n \ln a$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Equations différentielles

$$y' - ay = 0 \quad y = k e^{ax}$$

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad y = a \cos \omega x + b \sin \omega x$$

Trigonométrie

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

Nombres complexes ($j^2 = -1$)

forme algébrique

forme trigonométrique

$$z = x + jy$$

$$z = \rho (\cos \theta + j \sin \theta)$$

$$\bar{z} = x - jy$$

$$\bar{z} = \rho (\cos \theta - j \sin \theta)$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rho = |z|$$

$$\theta = \arg(z)$$

Calcul vectoriel dans le plan

$$\vec{v}, \vec{v}' = xx' + yy'$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}' \neq \vec{0}$:

$$\vec{v}, \vec{v}' = \|\vec{v}\| \times \|\vec{v}'\| \cos(\vec{v}, \vec{v}')$$

$\vec{v}, \vec{v}' = 0$ si et seulement si $\vec{v} \perp \vec{v}'$

Aires dans le plan

Triangle : $\frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$ Trapèze : $\frac{1}{2} (B + b)h$

Disque : πR^2

Aires et volumes dans l'espace

Cylindre de révolution ou prisme droit d'aire de base B et de hauteur h : Volume Bh

Sphère de rayon R :

$$\text{Aire} : 4\pi R^2$$

$$\text{Volume} : \frac{4}{3} \pi R^3$$

Cône de révolution ou pyramide de base B et de hauteur h : Volume $\frac{1}{3} Bh$

Calcul intégral

* Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$$

$$* \int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

$$* \int_a^b kf(t) dt = k \int_a^b f(t) dt$$