BT DESSINATEUR MAQUETTISTE

MATHÉMATIQUES

SESSION 2009

DURÉE : 2 heures

COEFFICIENT : 3

Matériel autorisé :

- Toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante conformément à la circulaire n° 99-186 du 16/11/1999.

Document à rendre avec la copie :
Papier millimétré

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 2 pages numérotées de 1/2 à 2/2

EXERCICE (8 points)

On considère l'équation (E) d'inconnue réelle x : $3x^3 + 8x^2 - 20x - 16 = 0$.

1. Démontrer que -4 est une solution de (E).
2. Démontrer que pour tout réel x, $3x^3+8x^2-20x-16=(3x^2-4x-4)(x+4)$.
3. Résoudre l'équation (E).
4. Déduire de la question précédente les solutions réelles des équations d'inconnue x :
   a) $3(\ln(x))^3+8(\ln(x))^2-20\ln(x)-16=0$.
   b) $3e^{3x}+8e^{2x}-20e^x-16=0$.

PROBLÈME (12 points)

On considère la fonction f définie sur **R** par : $f(x)=3x+2-e^x$.
On note C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que la fonction f' dérivée de la fonction f sur **R** est définie par : $f'(x) = 3 - e^x$.

2. a) Résoudre dans **R**, l'inéquation : $3-e^x \geq 0$.
   b) Établir le tableau de variations de f.

3. a) Déterminer les coordonnées du point A, intersection de la courbe C avec l'axe des ordonnées.
   b) Déterminer une équation de T, tangente à C au point A.

4. a) Reproduire et compléter le tableau de valeurs (arrondies à 0,1) suivant :

x	-2	-1	0	1	ln (3)	2	2,5
$f(x)$							

   b) Représenter la courbe C, la tangente T et la droite D d'équation $y = 3x + 2$ sur une feuille de papier millimétré.

5. a) Hachurer sur le graphique le domaine du plan limité par les axes du repère, la courbe C et la droite d'équation $x = 2$.
   b) Calculer la valeur exacte puis approchée à 0,1 cm² près, de l'aire du domaine hachuré.

BREVET DE TECHNICIEN
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

Ce formulaire concerne les brevets de technicien préparés en deux ans après la seconde de détermination.

I. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = b\,u_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \ldots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

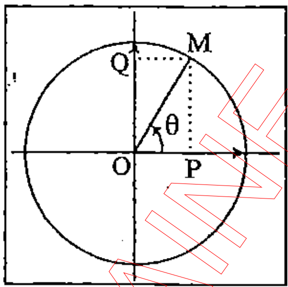
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

D. *TRIGONOMÉTRIE*



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'addition

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$; $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

II. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,
$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$(e^a)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,
$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(f+g)'=f'+g'$

$(kf)'=kf'$

$(fg)'=f'g+fg'$

$\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$

$(g\circ f)'=(g'\circ f)f'$

$(e^u)'=e^u u'$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt+\int_b^c f(t)\,dt$$

$$\int_b^a f(t)\,dt=-\int_a^b f(t)\,dt$$

Positivité

Si $a\leq b$ et $f\geq 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt\geq 0$

Intégration d'une inégalité

Si $a\leq b$ et $f\leq g$, alors $\int_a^b f(t)\,dt\leq\int_a^b g(t)\,dt$

Si $a\leq b$ et $m\leq f\leq M$, alors $m(b-a)\leq\int_a^b f(t)\,dt\leq M(b-a)$

Linéarité

$$\int_a^b(\alpha f(t)+\beta g(t))\,dt=\alpha\int_a^b f(t)\,dt+\beta\int_a^b g(t)\,dt$$

Valeur moyenne de f *sur* [a,b] : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équation	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$
$y''+\omega^2y=0$	$f(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$