BREVET DE TECHNICIEN

ENCADREMENT DE CHANTIER

Session 2009

MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures – Coefficient : 3

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.
Le formulaire officiel de mathématiques est autorisé.
La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

EXERCICE (8 points)

On considère le polynôme de la variable réelle x :

$$P(x) = x^3 - 7x + 6 .$$

1) a) Calculer $P(1)$.

   b) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout nombre réel x, on ait :

$$P(x) = (x - 1)(\mathrm{a}\,x^2 + \mathrm{b}\,x + \mathrm{c}) .$$

2) En admettant que, pour tout nombre réel x :

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6) ,$$

   résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation $P(x) = 0$.

3) En déduire la résolution dans l'ensemble des nombres réels des équations suivantes :

   a) $(\ln x)^3 - 7 \ln x + 6 = 0$.

   b) $e^{3x} - 7\,e^{x} + 6 = 0$.

PROBLÈME (12 points)

On désigne par I l'intervalle $]0\,,+\infty[$.

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de I, par :

$$f(x) = (2 - \ln x) \ln x .$$

On appelle c la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,; \vec{i}\,, \vec{j}\,)$.

Unités : 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

1) a) Résoudre dans I l'équation : $f(x) = 0$.

   En déduire les coordonnées des points d'intersection A et B de la courbe c avec l'axe des abscisses.

   b) Résoudre dans I les inéquations : $\ln x > 0$

   et $2 - \ln x > 0$.

   En déduire le signe de $f(x)$ en fonction du nombre réel x de I. Préciser les positions relatives de la courbe c et de l'axe des abscisses.

2) Déterminer la limite de f en 0. En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.

3) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4) a) Déterminer la fonction dérivée f' de f sur l'intervalle I. Vérifier que pour tout nombre réel x de I :

$$f'(x) = 2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right).$$

b) Résoudre dans I l'équation : $1-\ln x = 0$,

puis l'inéquation : $1-\ln x > 0$.

c) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ en fonction du nombre réel x de I et le tableau de variation de f sur I.

On calculera la valeur exacte du maximum de f.

5) Déterminer une équation de la tangente t au point d'abscisse 1 de la courbe c.

6) Construire la droite t, placer les points A et B et construire la courbe c.

7) Soit F la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de I, par :

$$F(x) = 4\,x\ln x - x\,(\ln x)^2 - 4\,x.$$

a) Montrer que F est une primitive de f sur I.

b) Hachurer, sur le graphique, la partie Δ du plan délimitée par la courbe c, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

c) Calculer la valeur exacte, en unités d'aire, puis en cm^2, de l'aire de la partie Δ.